A TÉGLALAPMÓDSZER (II)

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

2. A téglalapmódszer és téglalapszabály alkalmazása keverési feladatok megoldására

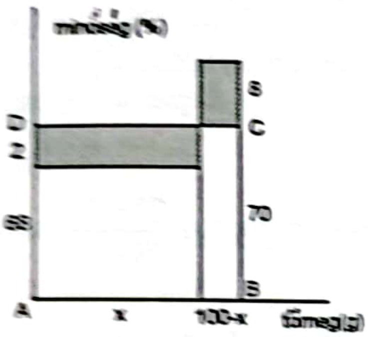
A keverék- és ötvözetszámítással kapcsolatos feladatok eredete a gyakorlatban keresendő (pl. kereskedelem, vegytan stb.). Éppen ezért, a megoldásukra a matematika különféle módszereket dolgozott ki, az egyszerű hármasszabálytól kezdődően, egészen az egyenletrendszerekig, keverési formulákig.

Célunk az, hogy minél elemibb és ugyanakkor minél hatékonyabb módszereket mutassunk be, keverési feladatok megoldására. Feladatokon keresztül két módszert mutatunk be: a téglalapmódszert és az ún. "régi szabályt", amelyet téglalapszabálynak neveznek.

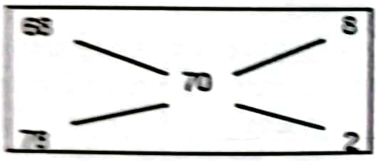
Tárgyaljunk egy mai megfogalmazású, klasszikus keverési feladatot.

1. példa. *68%-os és 78%-os kénsavoldatunk van. Milyen arányban kell keverjük ezeket, és melyikből mennyire van szükség,* 100 *gramm 70%-os oldat előállításához* ?

1.*megoldás* (*téglalapmódszerrel*). A keresett 68%-os kénsavoldat tömegének mérőszámát x-szel jelöljük. Induljunk ki egy 68 és x méretű téglalapból. Mellé rajzoljuk meg a $100 - x$ alapú és 78 magassági téglalapot. A felvett magasságon jelöljük ki a 70-et. Az $ABCD$ téglalap területe a 100g 70%-os oldatban levő kénsav tömegét jelenti, akárcsak az x és 68, valamint a $100 - x$ és 78 méretű téglalapok területeinek az összege. Ezért, a két árnyékolt téglalap területe egyenlő. Tehát: $2 \cdot x = 8 \cdot (100 - x)$, vagyis $10 \cdot x = 800$, ahonnan $x = 80$ (g), ami a 68%-os kénsavoldat tömegét, $100 - x = 20$ (g) pedig a 78%-os kénsavoldat tömegét jelöli. A keverési arány (az említett sorrend mellett) 80:20, vagyis 4:1.



2.*megoldás* (*téglalapszabály*).



A mellékelt téglalap "közepébe" írjuk be a kívánt keverék koncentrációjának a mérőszámát (a 70-et), a bal felső, illetve a bal alsó sarokba pedig a két összekeverendő kénsavoldat koncentrációjának a mérőszámát (a 68-at, illetve a 78-at). A "régi módszer" alapján a jobb felső sarokba $78 - 70 = 8$ - at írunk, a jobb alsó sarokba pedig $70 - 68 = 2$ -t írunk.

A keverési arány 8:2, így a 100g keverék előállításához $100 \cdot \frac{8}{8+2} = 80\,(\mathrm{g})$ 68%-os, illetve $100 \cdot \frac{2}{8+2} = 20\,(\mathrm{g})$ 78%-os kénsavoldatra van szükség. (Vagy másképpen számolva: $\frac{8}{2} = \frac{4}{1}$, $4 + 1 = 5$, $100 : 5 = 20$, $4 \cdot 20 = 80$)

Ez a módszer olyan, hogy könnyű megjegyezni a megoldáshoz szükséges lépéseket, hiszen ezeket algoritmikusan kell végezni, így a keverési feladatok megoldása ezzel automatikussá válik. Ha sok hasonló feladatot kell megoldani (például a kereskedőknek, vegyészeknek), ezzel a módszerrel időt lehet megtakarítani.

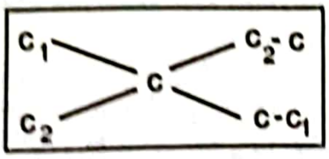
A továbbiakban igazolni fogjuk, hogy a leírt módszer matematikailag teljesen megalapozott.

Feltételezzük, hogy c_1 és c_2 minőségű anyagot úgy kell összekevernünk, hogy a keverék c minőségű legyen. Ha m_1, illetve m_2 az összekeverendő anyagok mennyisége (tömege), számítsuk ki milyen arányban kell ezeket kevernünk, továbbá határozzuk meg az m_1-et és az m_2-t, amennyiben az $m_1 + m_2 = m$ adott.

Ha a c_1 minőségű anyagból m_1 tömeg egység, a c_2 minőségűből pedig m_2 tömeg egység áll rendelkezésünkre, akkor az össztömeg $m_1 + m_2$ egység. Az $m_1 + m_2$ egységnyi keveréknek a minősége c kell legyen, vagyis teljesülnie kell az $m_1c_1 + m_2c_2 = c(m_1 + m_2)$ (*) egyenlőségnek, ahonnan a következő kifejezések vezethetők le:

$$m_1 = (m_1 + m_2)\frac{c_2 - c}{c_2 - c_1} \quad \text{és} \quad m_2 = (m_1 + m_2)\frac{c - c_1}{c_2 - c_1} \qquad (1)$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{c_2 - c}{c - c_1} \quad (2) \qquad \text{és} \quad c = \frac{m_1c_1 + m_2c_2}{m_1 + m_2} \qquad (3)$$



Most végezzük el a számolásokat a téglalapmódszer szerint. Nyilván feltételezhető, hogy $c_1 < c_2$ és $c_1 < c < c_2$. A 2. megoldásnál ismertetett műveletek során, a keverési arány $(c_2 - c):(c - c_1)$ és ez a (2) alapján valóban így is van; továbbá az

$$(m_1 + m_2)\frac{c_2 - c}{(c_2 - c) + (c - c_1)} \quad \text{és} \quad (m_1 + m_2)\frac{c - c_1}{(c_2 - c) + (c - c_1)}$$

az (1)-es képletekkel egyezően, megadják a keveréshez szükséges kétféle anyag tömegét.

Számolásokkal könnyen belátható, hogy az (1), (2), (3) képletek egymással ekvivalensek.

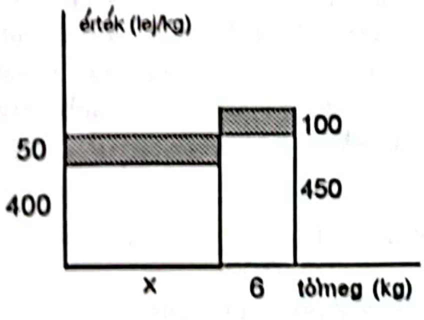
Ezen képletek alapján, a megoldás azonnal felírható:

$m_1 + m_2 = 100\,(\text{g})$, $c_1 = 68\ (\%)$, $c_2 = 78\ (\%)$ és $c = 70\ (\%)$. $m_1 = 100 \cdot \frac{78 - 70}{78 - 68} = 80\,(\text{g})$,

$m_2 = 100 \cdot \frac{70 - 68}{78 - 68} = 20\ (\text{g})$.

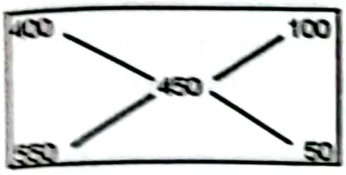
2.példa: *Hány kilogramm 400 lej/kg-os búzát kell összekeverni 6 kg 550 lej/kg-os búzával, hogy a keverék ára 450 lej/kg legyen?*

1.*megoldás*. A keresett búzamennyiség tömegét jelöljük x-szel.



Induljunk ki egy 400 egység és x egység méretű téglalapból, a mellékelt ábra szerint. Az x méretű oldalt hosszabítsuk meg 6 egységgel. A 6-os fölé szerkesszünk egy 550 egység magasságú téglalapot. Ennek a területe a 6 kg 550 lej/kg-os búza értéke. A felvett magasságon jelöljük ki a 450-et, és rajzoljuk meg az $x + 6$ alapú, és 450 magasságú téglalapot is, amelynek a területe egyenlő a kapott 450 lej/kg-os keverék értékével. A feladat feltételei szerint a 400 és x méretekkel rendelkező, valamint a 6 és 550 méretekkel rendelkező téglalapok területének összege egyenlő kell legyen a $6 + x$ és 450 méretű téglalap területével. Ez azt jelenti, hogy a két árnyékolt téglalap területe egyenlő. Tehát: $50 \cdot x = 6 \cdot 100$, azaz $x = 12$ (kg), ami pontosan a keveréshez szükséges 400 lej/kg-os búzamennyiséget adja meg.

2.megoldás.



Az ismertetett téglalapszabály szerint "kitöltjük" a mellékelt ábra téglalapját. A rajz megmutatja, hogy a keverési arány $\frac{100}{50}=\frac{2}{1}$, vagyis az olcsóbb búzából 2, a drágábból 1 részt kell venni. Az (1) - (3) képletek jelöléseivel: $m_1 = ?$, $m_2 = 6(\text{kg})$, $c_1 = 400\,(\text{lej/kg})$, $c_2 = 550\,(\text{lej/kg})$ c=450(lej/kg)

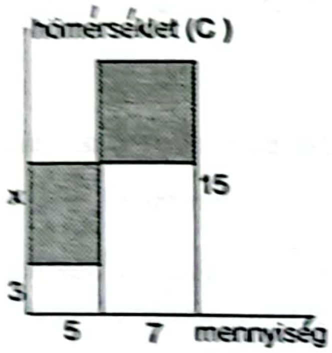
A (3) képlet alapján: $450=\dfrac{m_1\cdot 400+6\cdot 550}{m_1+6}$, ahonnan $m_1 = 12(\text{kg})$.

Megjegyzés: Az (1) - (3) képletek alapján különböző feladattípusok fogalmazhatók meg olyan értelemben, hogy az m_1, m_2, c_1, c_2, c öt ismeretlen közül más-más négyet (vagy ennél kevesebbet) adunk meg, és meghatározzuk az ismeretlent (vagy ismeretleneket - amikor a megoldás nem egyértelmű, azaz többféle megoldás is létezhet).

Ilyen értelemben egy újabb feladattípus a következő:

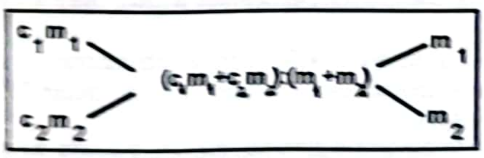
3. példa. *5 liter 3 C^0-os és 7 liter 15 C^0-os vizet keverünk össze. Határozzuk meg a kapott keverék hőmérsékletét.*

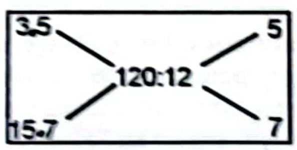
1.megoldás: A téglalapmódszer alapján, a mellékelt ábra szerint először az 5 és 3 méretű, majd a 7 és 15 méretű téglalapokat rajzoljuk meg. Ezután, ha $x + 3$ a kapott víz hőmérséklete, a $3 + x$ magasságban meghúzzuk az alappal párhuzamos egyenest. Az így keletkezett árnyékolt téglalapok területeinek az egyenlősége alapján $5\cdot x = 7\cdot(15-x-3)$, vagyis $12\cdot x = 7\cdot 12$, ahonnan x = 7, így $x + 3 = 10$ (C^0), ami pontosan a keverék hőmérséklete.



2.megoldás. A (3) képletet alkamazzuk $m_1 = 5$, $c_1 = 3$, $m_2 = 7$, $c_2 = 15$, c = ? esetén, miszerint $c=\dfrac{5\cdot 3+7\cdot 15}{5+7}=10$.

3.megoldás. Ugyancsak a (3) képlet alapján, az ilyen típusú feladatok esetében a következő általános érvényű téglalapszabály írható fel (ezúttal pontosan azt a számot kell meghatározni, amit a téglalap "közepébe" írunk):



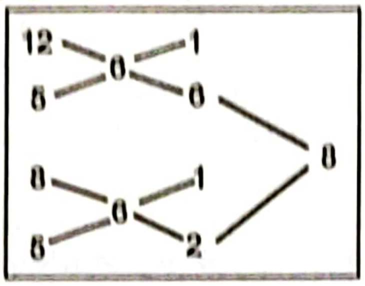


(A jobb oldali téglalapból feladatunkra a válasz: $c = 120 : 12\,(C^0)$)

4. példa. *Egy boltosnak háromféle teája van: ceyloni, amely fontonként*[*] *5\$, indiai, amely fontonként 8\$ és kínai, amelyből 1 font 12\$. Milyen arányban kell a háromféle teát keverni ahhoz, hogy 1 font keverék ára 6\$ legyen ? Vajon csak egyetlen megoldása van a feladatnak ?*

[*] 1 angol font = 453,592 kg

Megoldás. L.F. Magnyickij Aritmetika c. könyvében ez a módszer olvasható: Amikor három áruból egy negyediket keverünk össze úgy, hogy a keverék ára adott, akkor két rajzzal (téglalapszabállyal) megoldható a feladat:



1 rész kínai tea
1 rész indiai tea
8 rész ceyloni tea

Az ismertetett téglalapszabályt alkalmazzuk: először a legolcsóbb és a legdrágább anyag árával, másodszor a legolcsóbb és a középső anyag árával. Ekkor megkapjuk, hogy hány részt kell a legdrágább (a 12\$-os) és a közepes árú anyagból (a rajzon 1 és 1). Azt, hogy hány rész kell a legolcsóbb anyagból úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk az első ill. a második rajzon a legolcsóbb anyaghoz tartozó számot ($6+2=8$). Az eredmény jó, mert ha $\frac{8}{10}$ font 5\$-os, $\frac{1}{10}$ font 8\$-os és $\frac{1}{10}$ font 12\$-os teát keverünk össze, akkor ebből 1 font teát kapunk, amelynek ára: $\frac{8}{10}\cdot 5+\frac{1}{10}\cdot 8+\frac{1}{10}\cdot 12=6$ (\$).

A (4) képlet szerint (csupán "ennyi" feltétellel) a megoldás nem egyértelmű, hiszen $6=\frac{5\cdot m_1+8\cdot m_2+12\cdot m_3}{m_1+m_2+m_3} \Leftrightarrow m_1=6m_3+2m_2$, és ez utóbbi egyenletnek végtelen sok m_1, m_2, $m_3\in N^*$ megoldása van. Ennek ellenére, akárhány anyagot is keverünk össze, a bemutatott kombinált téglalapmódszerrel mindig megadható a feladat megoldása.

Feladatok

1. 11 karátos és 14 karátos ezüstöt keverünk össze. Mennyi kell az egyes fajtákból ahhoz, hogy 1 font 12 karátos ezüstöt kapjunk ?

(1 angol font = 453,592 g; 1 karát = az arany tömegének $\frac{1}{24}$-ed része).

2. Ha 15 kg 40%-os kénsavat vízzel összekevernek, 15%-os töménységű keveréket kapnak. Számítsuk ki a kapott keverék tömegét !

3. Egy ötvözet 10g aranyból és 20g ezüstből van. Mennyi aranyat kell hozzáadni ahhoz, hogy a kapott ötvözet finomsága 0,800 legyen ?

4. Ipari célokra összekevernek két minőségű szeszt. Ha az elsőből 5 litert, a másodikból 7 litert vesznek, akkor 65^0-os szeszt, ha viszont az elsőből 20 litert, a másodikból pedig 4 litert vesznek, akkor 70^0-os szeszt nyernek. Határozzuk meg a felhasznált kétfajta szesz fokszámát!

5. Összekeverünk 4 kg 80^0-os, 2,5 kg 75^0-os és 6 kg 70^0-os alkoholt. Hány fokos a keverék ? (80^0-os alkoholon olyan keveréket értünk, amelynek 80%-a tiszta alkohol, 20%-a víz).

6. Három ötvözet finomsági foka rendre: 0,7; 0,8 és 0,9. Összeolvasztva, 4,5kg ötvözetet készítünk, amelynek finomsági foka 0,82. Milyen mennyiséget kell vegyünk az egyes ötvözetekből, ha a harmadikból 600g-ot vettünk ?

SZAKIRODALOM

[1] *Dr. Pintér János:* Problémamegoldás az általános iskola matematika oktatásában. A Matematika Tanítása 3/1996.

[2] *Sz.N.Olehnyik és társai:* Régi szórakoztató feladatok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1990.

[3] *Grigore Gheba:* Matematika gyakorlatok és feladatok, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.