A HEURISZTIKUS OKOSKODÁS SZÉPSÉGEIBŐL

Tuzson Zoltàn tanàr,Székelyudvarhely

A mindennapi,problémamegoldò tevékenységeink soràn egyre gyakrabban hallhatjuk az ùn. "heurisztikus okoskodàs" kifejezést.Vessünk hàt egy pillantàst erre a fogalomra.

A heurisztika célja a felfedezés és a feltalàlàs mòdszereinek és szabàlyainak a tanulmànyozàsa.

A leghiresebb kisérleteket a heurisztika rendszeres felépitése terén EUKLIDÉSZ? PAPPOSZ,DÉSCARTES,LEIBNIZ,BOLZANO tették.Ennek ellenére,a modern heurisztika részletes kifejlesztője PÓLYA GYÖRGY,akit a "modern heurisztika atyja " névvel tisztelnek meg.

Legjelentősebb munkài: A gondolkodàs iskolàja,A problémamegoldàs iskolàja,Indukciò és analògia,A plauzíbilis következtetés,stb. amelyeket a vilàg több nyelvére is leforditottak.A szerző elképzelései szerint ezen a szinten,a matematika inkàbb művészet mint tudomàny.

Egy befejezett formàban megjelenő probléma megoldàsa tisztàn bizonyitò,csupàn bizonyitàsokat tartalmaz.Mielőtt azonbam bebizonyitanànk,ki kell talàlni à gondolatmenetet,és ezt plauzíbilis okoskodàssal,talàlgatàssal fedezzük fel.

Egy hasonlattal élve:ahogy szükségünk van àlvànyozàsra,amikor hàzat épitünk,éppùgy szükségünk van heurisztikus okoskodàsra,amikor szigorù bizonyitàst épitünk föl.

Belàthatò tehàt,hogy a matematikai tudàsunkat bizonyitò okoskodàssal bizonyitjuk be,de sejtéseinket plauzíbilis okoskodàssal tàmasztjuk alà.

Szemtől-szembe àllitva e két tipusu`okoskodàst,amig a bizonyitò okoskodàs-a formàlis vagy alkalmazott logika eszközeit és szabàlyait hasznàlva - biztos,vitathatatlan és végleges,addig a heurisztikus okoskodàs kockàzatos,vitathatò,időleges és nem szigorù,csak àtmeneti és plauzíbilis.Akkor lesz végleges és szigorù,ha a megoldàs màr a kezünkben van.Ezért hàt -a problémamegoldàs érdekében- szükségünk van àtmeneti okoskodàsra,mielőtt eljutunk a véglegeshez.

A heurisztika gyakran épül indukcióra és analògiàra. Oktatàsi mòdszere a felfedező tanulàs,heurisztikus pàrbeszéd.

Nagyon fontos a heurisztikus stratégiàk tudatositàsa,tanitàsa, tanulàsa,ami fokozatosan fejleszti a problémamegoldò készséget.

A modern heurisztika a feladatmegoldàs <u>folyamatàt</u> tàrja fel, elsősorban azokat a gondolkodàsi műveleteket amelyek ebben a folyamatban különösen hasznosak.

A gondolkodàsi műveletek közül előszeretettel hasznàlja az analizist,szintézist,összehasonlitàst,specializàlàst,àltalànositàst stb.

A továbbiakban,a heurisztikus okoskodàs szépségeiből merítve, egyetlen feladatot mutatunk be,de nem mint kész "terméket"tàlalva, hanem az olvasòval együtt jàrva be azt az utat,amely a megoldàshoz elvezet.

<u>FELADAT</u>:Adott 1996 darab 1-lejes pénzérmét üres boritékokba ùgy osszuk el,hogy ezek segitségével ki tudjunk fizetni bàrmely 1 és 1996 lej közötti egész összeget.

a) Legkevesebb hàny boritékra van szükség?

b) Hogyan fizetünk ki egy adott pénzösszeget?

(Tehàt ha pl. egy boritékba lo lejt osztottunk,csak a lo lejjel együtt fizethetünk).

A feladat megoldàsàt heurisztikus okoskodàssal kezdjük:

(1) Csak ùgy tudunk 1 lejt kifizetni,ha az egyik boritékba(mondjuk est első boritéknak és jelöljük B_1-el) pontosan 1 lejt teszünk.

(2) Ha a màsodik boritékba,B_2-be,szintén 1 lejt tennénk,akkor ahoz, hogy 3 lejt is ki tudjunk fizetni,a B_3-ba vagy 1 lejt,vagy 2 lejt teszünk.Ez utòbbi esetben jobb, mert igy 2+1=3 és 2+1+1=4 lejt is ki tudunk fizetni.

(3) Ha figyelmesebbek vagyunk - a minimalitàs elvét követve - jobban tennénk,ha a B_1-be 1 lejt és a B_2-be eleve 2 lejt tettünk volna,mert igy B_1 és B_2-vel 1,2,3 lej mindegyikét kifizethetjük.

(4) Ahoz ,hogy 4 lejt is kifizethessünk célszerü,hogy a B_3-ba pontosan

4 lejt tegyünk, hiszen ìgy a 4+1=5, 4+2=6, 4+2+1=7 alapjàn 1-től 7 lejig mindgen összeget fizetni tudunk.

(5) Mivel 8 lejt màr nem tudunk kifizetni, tegyünk a B_4-be 8 lejt. Így 8+1=9, 8+2=1o, 8+2+1=11, 8+4=12, 8+4+1=13, 8+4+2=14, 8+4+2+1=15 előàllìtàs alapjàn 15 lejig màr tudunk fizetni.

(6) Marad tehàt, hogy a B_5-be 16 lejt tegyünk és belàssuk, hogy 31 lejig minden összeget ki tudunk fizetni. Megfigyeléseinket ìgy összegezzük:

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_9	B_{1o} ...
1	2^1	2^2	2^3	2^4	2^8	2^9 .....

(T)

(7) A kérdés: ìlymòdon hàny borìtékot hasznàlunk el? Tulajdonképpen az az $n \in N^*$ érdekel, amelyre $1+2+\ldots+2^{n-1} \leq 1996 < 1+2+\ldots+2^{n-1}+2^n$ vagyis az $1+2+\ldots+2^{k-1}=2^k-1$ alapjàn $2^n-1 \leq 1996 < 2^{n+1}-1$ (n)

(8) Mivel $1o24=2^{1o} < 1996 < 2^{11}=2o48$, ezért a borìtékok szàma 11, és az 1+2+...+2^9 =2^{10}-1=1o23 alapjàn a B_{11}-be 1996-1o23=973 lej kerül, a B_1-B_{1o} tartalmàt pedig a (T) tàblàzat tükrözi.

A tovàbbiakban tehàt az alàbbiakra kell vàlaszt talàlnunk:

- A 11 borìték tényleg a lehető legkevesebb szàmù borìték?
- Ki lehet-e efektìve fizetni minden 1 és 1996 közötti egész összeget?
- Hogyan történik efektìve ez a kifizetés?

Pròbàljunk leghamarabb ez utòbbi kérdésre vàlaszolni, mert ez aga utàn vonja a màsik két kérdés megvàlaszolhatòsàgàt is.

9) Nézzük meg, hogyan tudnànk kifizetni pl. a 415 lejt az előbbi 11 orìték segìtségével.

a) Megkeresem: $2^8 \leq 415 < 2^9$ ìgy kifizetek a B_9-el 2^8=256 lejt.

b) A maradék 415-256=159 lej kifizetése érdekében megkeresem $2^7 \leq 159 < 2^8$ ìgy kifizetek B_8-al a 2^7=128 lejt. Marad még 31 lej.

c) Megkeresem $2^4 \leq 31 < 2^5$ ìgy kifizetek a B_5-el 2^4=16 lejt.

d) A maradék 31-16=15 lej kifizetése érdekében megkeresem $2^3 \leq 15 < 2^4$ ìgy kifizetek a B_4-el 2^3=8 lejt. Marad még 7 lej.

e) Most màr belàthatò, a 7 lejt a 4+2+1 alapjàn a B_3, B_2, B_1-el fizetem.

Tehàt $\boxed{415=2^8+2^7+2^4+2^3+2^2+2+1}$ (*)

1o) Vajon mit jelképez a (*) összeg? Hamar ràjöhetünk arra, hogy pontosan a 415-nek a 2-es szàmrendszerben valò àtiràsa, vagyis:

$$415=\underbrace{110011111}_{9\,db}{}_{(2)} \qquad (*)$$

(11) Most màr minden egyre tisztàbb. Az előbbi feliràsban, jobbròl balra haladva leolvashatjuk, hogy melyik boritékkal fizessünk: ahol 1 van, az 1-es helyének - jobbròl balra szàmitott - szàmù boritékkal fizetünk, ahol o àll, a helyének megfelelő boritekot nem hasznàljuk.

(12) Mivel $1023=\underbrace{1111111111}_{10\text{-szer}}{}_{(2)}$ és mivel B_{11} tartalma nem 2^{10} lej ahogyan a B_k tartalma 2^{k-1} lej minden $k\in\{\overline{1,10}\}$ ezért pl. az 1o25 lej kifizetése céljàbòl hiàba irnànk àt az 1o25-öt a 2-es szàmrendszerbe, ugyanis a B_{11} csak 973 lejt tartalmaz.

(13) Egy kis figyelemmel észrevehetjük, hogy 973 lej a B_{11}-el kifizethető és az 1996-1o25=971 alapjàn a maradék 971 $<$ 1o23 lej <u>màr</u> kifizethető a leirt mòdon. Így hàt az 1o23 lejnél nagyobb összeg kifizetésére is megtalàltuk a megoldàst. (Sőt, mi több, bàrmely 973 lejnél nagyobb összeg még kétféleképpen is kifizethető ha nem több, 1o23 lejnél)

Beláthattuk tehàt, hogy a föltett hàrom kérdés közül, az utolsò kettőt màr megvàlaszoltuk. Ami az első kérdést illeti, ahogyan a (2) és (3)-nàl okoskodtunk, ha az osztozkodàst màsképpen végezzük, több mint 11 boritékra lessz szükség, és megtörténhet, hogy adott intervallumba eső pénzösszegeket ki sem tudunk fizetni. Ennek az elemzését az érdeklődő olvasòkra bìzzuk.

(14) Altalànositàsként làssuk be, hogy az (n) feltételek alapjàn, ha az 1996 helyett $n\in N^*$ szàmot veszünk, akkor; legkevesebb

$k=[\log_2(n+1)]$ darab boriték kell, amennyiben $n=2^k-1$ alakù, és

$k=[\log_2(n+1)]+1$ darab boriték, az ellenkező esetben. ($K\in N^*$ és $[a]$ az a szàm egész részét jelenti). Így kifizethető bàrmely 1 és n-lej közötti egész összeg.

A heurisztikus okoskodàsunk itt véget ért, hiszen a megoldàs màr a kezünkben van, ezt az olvasò màris leirhatnà.

Befejezésül egy olyan feladat megoldàsàra hìvjuk fel az olvasót amely megoldàsa fokozott heurisztikus okoskodàst igényel:

<u>FELADAT:</u> Egy börtönben 1oo cella van 1-től 1oo-ig szàmozva. A foglàr szàzszor sorra jàrja mindegyik cellàt és a k-adik ($1\leq k\leq 100$) ùtja soràn

minden k-adik zàron fordìt egyet.A zàrak pàratlan szàmù fordìtàsra nyitnak,pàrosszàmra pedig zàrnak.Mely cellàk vannak nyitva a börtönőr századik sétàja utàn?(A Matematika Tanìtàsa 3/1989 szàmànak 12o9. feladata).

Vigyàzat! A feladat nem àllìtja,hogy a ccellàk eredetileg zàrva vannak-e,ìgy erre is gondolni kell.