5. *Adott az $x_{n+1} = 2^{x_n} - 1$ rekurziós képlettel értelmezett $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat, ahol $x_0 \in (0, 1)$. Bizonyítsuk be, hogy az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét.*

Megoldás. Először igazoljuk a $2^x < x + 1$, $(\forall)\ x \in (0, 1)$ egyenlőtlenséget. Valóban, ha $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2^x - x - 1$, akkor $g'(x) = 2^x \ln 2 - 1$. Továbbá $g'(x) = 0$, ha $x = -\ln\ln 2 \in (0, 1)$. Mivel $g(0) = 0$, $g(1) = 0$ és $g'(x) < 0$, ha $x \in (0, -\ln\ln 2)$ és $g'(x) > 0$, ha $x \in (-\ln\ln 2, 1)$, következik, hogy $g(x) < 0$, $(\forall)\ x \in (0, 1)$, azaz $2^x < x + 1$, $(\forall)\ x \in (0, 1)$.

A továbbiakban vezessük be az $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - 1$ függvényt. Mivel $f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$, az f függvény szigorúan növekvő. Abból a tényből, hogy $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ és f folytonos, következik, hogy $f((0, 1)) = (0, 1)$, tehát az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat korlátos. Fennáll az $x_1 = 2^{x_0} - 1$ összefüggés. A bizonyított egyenlőtlenség alapján $x_1 < x_0$ és mivel f szigorúan növekvő, az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat szigorúan csökkenő. Mivel a vizsgált $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat korlátos és szigorúan csökkenő, egyértelműen következik, hogy konvergens. Jelöljük l-el a sorozat határértékét. A $2^x = x + 1$ egyenletnek 0 és 1 megoldásai. Az $1 > x_0 > x_1 > \ldots > 0$ egyenlőtlenség alapján belátható, hogy l csak 0 lehet, tehát $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Természetesen az említett feladattípusnak még számtalan alkalmazása lehetséges. Könnyen találhat az olvasó más olyan f sorozatokkal kapcsolatos feladatokat, melyeket hasonló módon oldunk meg.

SZAKIRODALOM

[1] *D. M. Bătineţu*, Şiruri, Editura Albatros, 1979.
[2] *D. Brînzei*, ş.a., Matematici elementare, Ed. Junimea, Iaşi, 1983.

(Fordította: *Szilágyi Katalin* egyet. hallgató)

TERÜLETSZÁMÍTÁSI FELADATOK

(VII. osztály)

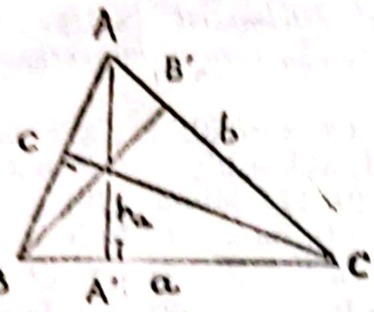
Írta: **Tuzson Zoltán** tanár, Székelyudvarhely

A terület fogalmának bevezetése és a területszámítással kapcsolatos eljárások elsajátítása már a VII. osztályos tankönyvben megtalálhatók Ezen fogalmak alapos elsajátításának szükségszerűsége a VIII. osztályban azonnal, megmutatkozik, amikor vetületek területét, oldal- és teljes felszíneket kell kiszámítani.

A továbbiakban láncszerűen fűzünk össze néhány olyan eredményt, amelyek a tanulók részére *igen nagy* fontossággal rendelkeznek, és bizonyításuk csak részben, vagy egyáltalán nem található meg a VII. osztályos tankönyvben.

1. feladat

Igazoljuk, hogy egy háromszögben az alap és a hozzátartozó magasság szorzata állandó.



1. ábra.

Vagyis, ha a, b, c jelöli rendre a BC, CA, AB oldalak hosszát és h_a, h_b, h_c a megfelelő oldalakhoz tartozó magasságok hosszát, felírható, hogy

$$ah_a = bh_b = ch_c \tag{1}$$

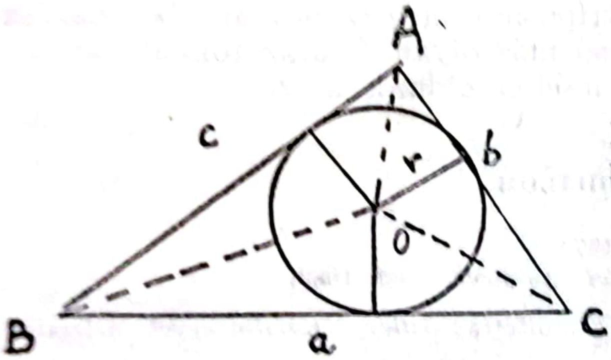
A bizonyítás különösebb nehézséget nem igényel: A'-, B'-, és C'-vel jelölve az A, B, illetve C csúcshoz tartozó magasság talppontját, az $ABA'\triangle \sim CBC'\triangle$ és $ACA'\triangle \sim BCC'\triangle$ hasonlóságokból felírható, hogy: $\frac{c}{a} = \frac{h_a}{h_c}$ és $\frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b}$, ahonnan az (1) egyenlőségek következnek.

A kapott eredmény fontossága a $T = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ területszámítási képletnél hangsúlyozódik ki. Azonnali alkalmazás:

2. feladat

Ha r *jelöli az* ABC *háromszögbe írt kör sugarát,* T *a háromszög területét és* $p = \frac{a+b+c}{2}$ (félkerület), *akkor*

$$r = \frac{T}{p}. \tag{2}$$



2. ábra.

Bizonyítás. O-val jelölve az ABC háromszögbe írt kör középpontját, felírható a $T_{ABC} = T_{ABO} + T_{BCO} + T_{CAO}$ egyenlőség, ahonnan $T = \frac{a\cdot r}{2} + \frac{b\cdot r}{2} + \frac{c\cdot r}{2}$, vagyis $T = \frac{a+b+c}{2}\cdot r = p\cdot r$, tehát $r = \frac{T}{p}$.

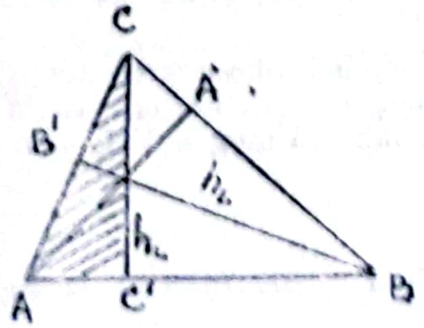
Nyilvánvalóan a beírt körrel kapcsolatos, érintő-sugár viszonyt a tanulók már ismerik.

3. feladat

Igazoljuk, hogy egy háromszög területe a két oldal és a közrezárt szög szinuszának félszorzatával egyenlő:

$$T = \frac{bc\cdot \sin A}{2} = \frac{ca\cdot \sin B}{2} = \frac{ab\cdot \sin C}{2}. \tag{3}$$

Bizonyítás. A'-, B'-, C'-vel jelölve az ABC háromszög A, B, illetve C csúcsához tartozó magasságának talppontját, az ABB' derékszögű háromszögben felírható a $\sin A = \frac{h_b}{c}$ egyenlőség. Tehát a $T = \frac{bh_b}{2}$ összefüggés alapján azonnal következik a (3) első összefüggése. A másik két összefüggést hasonlóképpen kapjuk. (A tanulók gyakorlatként bizonyítsák be!).



3. ábra.

Néhány azonnali következmény:

4. feladat

Ha α az ABCD *paralelogramma hegyes szöge és* x, *illetve* y *a két különböző oldal hossza, akkor:*

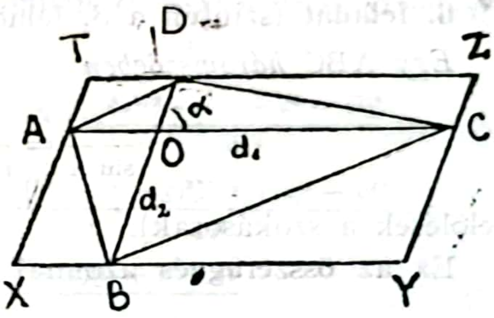
$$T_{ABCD} = x \cdot y \sin \alpha. \qquad (4)$$

Valóban, felírható, hogy $T_{ABCD} = T_{ABD} + T_{BCD}$, és használva a (3) képleteket, (4) azonnal adódik:

5. feladat

Ha d_1 *és* d_2 *az* ABCD *konvex négyszög átlóinak hossza és α az általuk bezárt hegyesszög, akkor:*

$$T_{ABCD} = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2}. \qquad (5)$$



4. ábra.

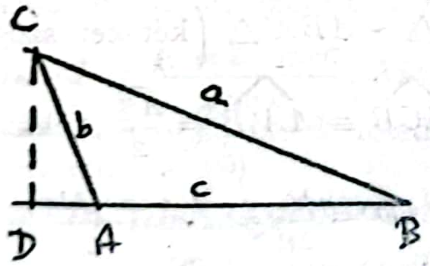
1. *bizonyítás.* Az $ABCD$ konvex négyszög köré szerkesszünk egy $XYZT$ paralelogrammát oly módon, hogy $A \in TX$, $B \in XY$, $C \in YZ$, $D \in TZ$ és $XY \| d_1$, $XT \| d_2$ legyen. O-val jelölve az átlók metszéspontját, mivel $TAOD$, $AOBX$, $BYCO$, $CZDO$ paralelogrammák és AD, AB, BC, CD ezeket két egyenlő területű részre osztják, felírható, hogy

$$T_{ABCD} = \frac{T_{XYZT}}{2}.$$

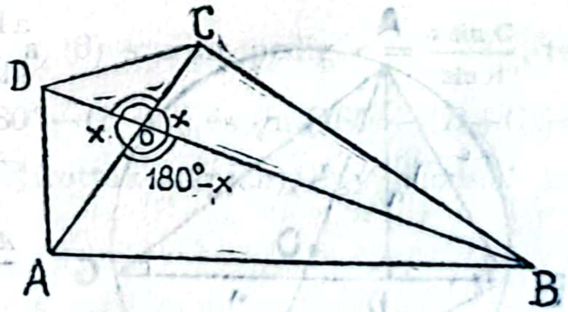
De $\widehat{DOC} = \alpha$ és $\widehat{TXY} = \alpha$, így (4) alapján:

$$T_{XYZT} = d_1 d_2 \sin \alpha, \text{ ahonnan következik (5)}$$

2. *bizonyítás.* Először igazoljuk a $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$ (*) egyenlőséget. Az 5. ábra alapján, ha $90° \leq \hat{A} < 180°$, felírható, hogy:



5. ábra.



6. ábra.

$$\sin(180° - A) = \frac{CD}{b} = \frac{c \cdot CD}{b \cdot c} = \frac{2T}{b \cdot c} = 2\,\frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2bc} = \sin A$$

(felhasználtuk (3)-at).

Az 6. ábra alapján, a (*) egyenlőség felhasználásával, felírható, hogy:

$$T_{ABCD} = \frac{OA \cdot OB \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{OC \cdot OB \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{OC \cdot OD \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{OD \cdot OA \cdot \sin \alpha}{2} =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{2} [(OA \cdot OB + OB \cdot OC) + (OC \cdot OD + OD \cdot OA)] = \frac{\sin \alpha}{2} \cdot$$

$$\cdot [OB(OA + OC) + OD(OC + OA)] = \frac{\sin \alpha}{2} (OA + OC)(OB + OD) =$$

$$= \frac{d_1 d_2 \cdot \sin \alpha}{2}.$$

Következmény. A merőleges átlójú négyszög területe egyenlő az átlók félszorzatával (innen adódik a rombuszra érvényes területszámítási képlet).

6. feladat (szintén a 3. feladat következménye)

Egy ABC *háromszögben*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2T} \tag{6}$$

(Jelölések a szokásosak).

Ez az összefüggés azonnal következik a (3)-ból:

$$T = \frac{bc \cdot \sin A}{2} \Rightarrow \frac{2T}{bc} = \sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{abc}{2T}.$$

Ugyanígy felírható a másik két egyenlőség is.

7. feladat*

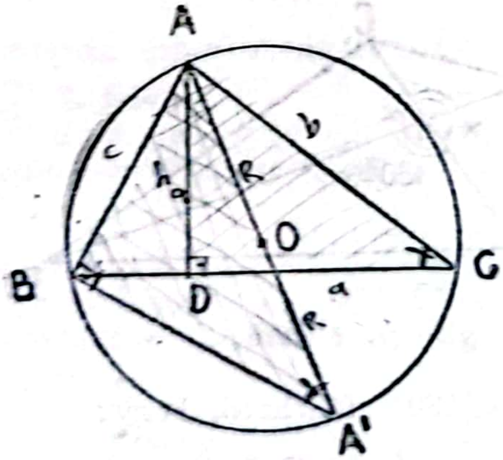
Ha R *az* ABC *háromszög köré írt kör sugara, akkor*

$$R = \frac{abc}{4T}. \tag{7}$$

Valóban, ha A'-vel jelöljük az A pont átmérősen ellentett pontját, akkor $\widehat{ABA'} = 90°$. Ha $AD \perp BC$, akkor $ADC\triangle \sim ABA'\triangle$ (két-két szög kongruens, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AA'B} = \frac{\widehat{AB}}{2}$, tehát:

$$\frac{AD}{c} = \frac{b}{2R} \Rightarrow AD = \frac{bc}{2R} \Rightarrow T = \frac{a \cdot AD}{2} =$$

$$= \frac{abc}{4R}, \text{ ahonnan } R = \frac{abc}{4T}.$$



7. ábra.

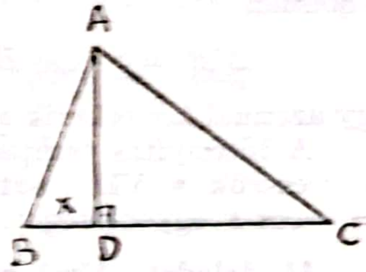
Így a (6) és (7) összefüggések alapján:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (szinusz-tétel)}$$

A továbbiakban feladatként tűzzük ki egy háromszög területének kiszámítását, amikor a három oldal hossza adott:

* A továbbiakban végig a háromszögben szokásos jelöléseket használjuk.

8. feladat (Heron képlete)



8. ábra.

Ha $p = \frac{a+b+c}{2}$ *és* T *az* ABC *háromszög területe, fennáll a következő egyenlőség:*

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (8)$$

Jelöljük x-szel a BD szakasz hosszát. Pitagorász tételét alkalmazva az ABD, illetve ADC derékszögű háromszögekben, felírható, hogy

$AD^2 = c^2 - x^2$, $AD^2 = b^2 - (a-x)^2$, ahonnan $c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$.

Innen

$$x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}, \text{ tehát } AD^2 = c^2 - x^2 = \frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{(2ac-a^2-c^2+b^2)(2ac+a^2+c^2-b^2)}{4a^2} = \frac{[b^2-(a-c)^2][(a+c)^2-b^2]}{4a^2} =$$

$$= \frac{(b+c-a)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{4a^2}.$$

Kiszámítva $p-a$, $p-b$, $p-c$ értékeit észrevehető, hogy a fenti egyenlőség a következőképpen írható:

$\frac{a^2AD^2}{4} = p(p-a)(p-b)(p-c)$, ahonnan ha figyelembe vesszük, hogy $T = \frac{a \cdot AD}{2}$, a (8) összefüggéshez jutunk.

9. feladat

Az ABC háromszög területe kiszámítható még a következő összefüggéssel is:

$$T = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)}. \qquad (9)$$

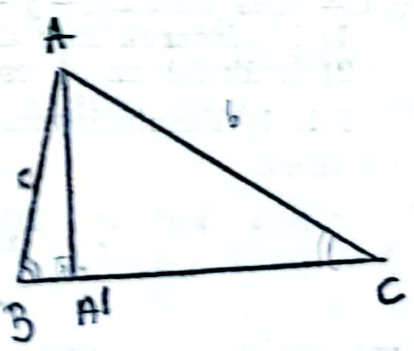
Valóban, a (3) szerint $T = \frac{a \cdot c \sin B}{2}$, a (6) szerint pedig $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$, tehát $T = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}$. Azonban $A = 180° - (B+C)$ és $\sin[180° - (B+C)] = \sin(B+C)$ (az 5. feladatban bizonyítottak alapján), így azonnal következik, a (9).

10. feladat (vetületek tétele)

Egy ABC háromszögben érvényesek az

$$a = b\cos C + c\cos B,\ b = c\cos A + a\cos C,$$
$$c = a\cos B + b\cos A \qquad (10)$$

egyenlőségek.



9. ábra.

Bizonyítás. Az ABC háromszögben A'-vel jelölve az A pont BC oldalra való vetületét, az ABA' és ACA' derékszögű háromszögekből felírható, hogy:

$$\cos B = \frac{A'B}{c},\ \cos C = \frac{A'C}{b},$$

ahonnan

$$A'B = c \cdot \cos B \text{ és } A'C = b \cdot \cos C. \text{ De } A'B + A'C = a,$$

így azonnal következik a (10) első összefüggése. (Analóg módon a többi).

A bizonyítás tompaszögű háromszögekre is elvégezhető, ha figyelembe vesszük a VII. osztályos tankönyvben is szereplő $\cos(180° - x) = -\cos x$ egyenlőséget.

11. feladat (Általánosított Pitagorász vagy koszinusz tétel)

Egy tetszőleges ABC *háromszögben fennállnak a következő összefüggések:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \tag{11}$$

Valóban, ha a (10) második egyenlőségét b-vel, a harmadikat c-vel szorozzuk és összeadjuk:

$$b^2 + c^2 = bc\cos A + ab\cos C + ac\cos B + bc\cos A =$$
$$= a(b\cos C + c\cos B) + 2bc\cos A = a^2 + 2bc\cos A,$$

ahonnan a (11) első egyenlősége következik. (Felhasználtuk a (10) első egyenlőségét is).

Ha ezeket az összefüggéseket a VII–VIII. osztályos tanulók elsajátítják, olyan jelentős eredmények birtokába jutnak, amelyek nagymértékben elősegítik későbbi tanulmányaikat, valamint a fokozati vizsgákon való eredményes szereplésüket.

AZ 1989. ÉVI JÚNIUSI ÉRETTSÉGI VIZSGA FELADATAI

I. Legyen G az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R}$$

alakú mátrixok halmaza.

Mutassuk meg, hogy

1) G stabil része $M_3(\mathbf{R})$-nek a szorzásra vonatkozóan;

2) a $(G, .)$ csoport izomorf az $(\mathbf{R}, +)$ csoporttal.

II. Az ABC háromszögben $AB: x - 2y + 3 = 0$, $BC: 3x + 2y + 1 = 0$ és $CA: 2x - y - 3 = 0$.

1) Határozzuk meg az A, B, C csúcsok koordinátáit.

2) Írjuk fel az A csúcshoz tartozó magasság egyenletét.

III. 1) Tanulmányozzuk az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ \dfrac{3}{2}, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonosságát.