130.o.
[2]. *I.M.Jaglom:* Boole-struktúrák és modelljeik. Műszaki Kiadó. Budapest, 1983, 143.o.-148.o.
[3]. *I.Tomescu:* Introducere în combinatorică. Editura Tehnică, Bucureşti 1972 38.o-48.o.
[4]. *J.Szendrei:* Algebra és számelmélet. Tankönyvkiadó, Szeged, 1974 (85.o.)
[5]. *T.Spircu:* Structuri algebrice prin probleme. Ed.Ştiinţifică, Bucureşti, 1991, 17.o.-20.o.

ANALÓGIA TESZT
(Hamis analógiák)

Összeállította: **Tuzson Zoltán** tanár, Székelyudvarhely

Az analógia egy gondolkodási művelet, amelynek alkalmazásakor két vagy több jelenségnek, dolognak bizonyos tulajdonságában, viszonyában, struktúrában való megegyezése alapján más tulajdonságokban, viszonyokban, struktúrákban való megegyezést sejtünk.

Az analógia mint a hasonlóság egyik fajtája, a tanítás-tanulás és az emlékezés hasznos eszköze. Gondoljunk csak pl. az egész számok prímtényezős felbontására vagy a maradékos osztás tételének analógjai a polinomok esetén, egy háromszögbe írt kör és egy kúpba írt gömb analógiájára, stb.

Érdekes és ugyanakkor sajnálatos módon, a matematika tanítása során a tanulók (főleg a kisebb osztályosok) rendkívül hajlamosak a hamis analógiák "gyártására".

Csupán az algebra területére szorítkozva, a továbbiakban igaz és hamis állításokat sorolunk fel. Jelöljük meg ezek közül a hamis állításokat!

Feltételezhetően a hamis állítások egyes - velük nagyon hasonló - igaz állításból hamis analógiás következtetéssel jöttek létre.

1) $a+b=b+a$, bármely a,b valós számok esetén. $((\forall)\ a,b \in \mathbb{R})$
2) $a-b=b-a$, bármely a,b valós számok esetén.
3) $m(ab)=mamb$, bármely a,b,m valós számok esetén.
4) $m(a+b)=ma+mb$, bármely a,b,m valós számok esetén.
5) $\frac{x+y}{a}=\frac{x}{a}+\frac{y}{a}$, bármely $x,y,a,b;\ a\neq0$ valós számok esetén.
6) $\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{a}=\frac{x\cdot y}{a}$, bármely $x,y,a,b;\ a\neq0$ valós számok esetén.
7) $\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}=\frac{x\cdot y}{ab}$, bármely $x,y,a,b;\ ab\neq0$ valós számok esetén.
8) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{x+y}{a+b}$, bármely $x,y,a,b;\ a+b\neq0, a\cdot b\neq0$ valós számok esetén.
9) $\frac{k\cdot a\cdot b}{kb}=a$, bármely $a,b,k;\ kb\neq0$ valós számok esetén.
10) $\frac{ka+b}{ka}=\frac{a+b}{a}=b$, bármely $a,b,k;\ k\cdot a\neq0$ valós számok esetén.
11) $a+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$, bármely $a,b,c\ c\neq0$ valós számok esetén.
12) $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}$, bármely $a,b,c;\ c\neq0$ valós számok esetén.
13) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, bármely $a,b;\ a+b\neq0, ab\neq0$ valós számok

esetén.

14) $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{a\cdot b}$, bármely a,b; $ab\neq 0$ valós számok esetén.

15) $\frac{b+a}{b+c}=\frac{a}{c}$, bármely a,b,c; $c(b+c)\neq 0$ valós számok esetén.

16) $\frac{b\cdot a}{b\cdot c}=\frac{a}{c}$, bármely a,b,c; $bc\neq 0$ valós számok esetén.

17) $\frac{ax}{b}+\frac{c}{dx}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, bármely a,b,c,d,x; $bdx\neq 0$ valós számok esetén.

18) $\frac{ax}{b}\cdot\frac{c}{dx}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$, bármely a,b,c,d,x; $bdx\neq 0$ valós számok esetén.

19) $\frac{ax}{b}:\frac{c}{dx}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$, bármely a,b,c,d,x; $bcdx\neq 0$ valós számok esetén.

20) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\leftrightarrow ad=bc$, bármely a,b,c,d; $bd\neq 0$ valós számok esetén.

21) $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\leftrightarrow ad<bc$, bármely a,b,c,d; $bd\neq 0$ valós számok esetén.

22) $|x+y|=|x|+|y|$, bármely x,y valós számok esetén.

23) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$, bármely x,y valós számok esetén.

24) $\sqrt{a^2\cdot b^2}=a\cdot b$, bármely a,b nemnegatív számok esetén.

25) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$, bármely a,b nemnegatív számok esetén.

26) $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{-szer}}$, bármely $a>0$ és $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

27) $a^n=n\cdot a$, bármely $a>0$ és $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

28) $ab=ba$, bármely a,b valós számok esetén.

29) $a^b=b^a$, bármely a,b nemnegatív számok esetén.

30) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, bármely $a>0$; $m,n\in\mathbb{N}$ számok esetén.

31) $a^m+a^n=a^{m\cdot n}$, bármely $a>0$; $m,n\in\mathbb{N}$ számok esetén.

32) $a^m\cdot a^n=a^{m\cdot n}$, bármely $a>0$; $m,n\in\mathbb{N}$ számok esetén.

33) $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$, bármely $a>0$; $m,n\in\mathbb{N}$ számok esetén.

34) $(a^m)^n=a^{m+n}$, bármely $a>0$; $m,n\in\mathbb{N}$ számok esetén.

35) $a^{m^n}=(a^m)^n$, bármely $a>0$; $m,n\in\mathbb{N}$ számok esetén.

36) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, bármely $a>0$; $n\in\mathbb{N}$ számok esetén.

37) $a^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a^n}$, bármely $a>0$, $n\in\mathbb{N}^*$ számok esetén.

38) $a^{-n}=-a^n$, bármely $a>0$, $n\in\mathbb{N}$ számok esetén.

39) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$, bármely $a,b>0$, $n\in\mathbb{N}$ számok esetén.

40) $(a+b)^n=a^n+b^n$, bármely $a,b>0$, $n\in\mathbb{N}^*$ számok esetén.

41) $(a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)$, bármely a,b,c,d valós számok esetén.

42) $(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+b\cdot d$, bármely a,b,c,d valós számok esetén.

43) $a+b=c+d\Rightarrow ab=cd$, bármely a,b,c,d valós számok esetén.

44) $a+b=c+d\Rightarrow (a=b$ és $c=d)$ vagy $(a=d$ és $b=c)$, bármely a,b,c,d valós számok esetén.

45) $ka+b=k(a+b)$, bármely a,b,k valós számok esetén.
46) $x\le y \rightarrow x+z\le y+z$, bármely x,y,z valós számok esetén.
47) $x\le y \rightarrow x\cdot z\le y\cdot z$, bármely x,y,z valós számok esetén.
48) $x\cdot z\le y\cdot z \rightarrow x\le y$, bármely x,y,z valós számok esetén.
49) $x+z\le y+z \rightarrow x\le y$, bármely x,y,z valós számok esetén.
50) $x\le x'$ és $y\le y' \rightarrow x+y\le x'+y'$, bármely x,y,x',y' valós számok esetén.
51) $x\le x'$ és $y\le y' \rightarrow x\cdot y\le x'\cdot y'$, bármely x,y,x',y' valós számok esetén.
52) $a=b \Rightarrow a^2=b^2$, bármely a,b valós számok esetén.
53) $a\le b \rightarrow a^2\le b^2$, bármely a,b valós számok esetén.
54) $\sqrt{a}=\sqrt{b} \rightarrow a=b$, bármely a,b nemnegatív számok esetén.
55) $a^2=b^2 \rightarrow a=b$, bármely a,b valós számok esetén.
56) $ac=bc \Rightarrow a=b$, bármely a,b,c valós számok esetén.
57) $x<y \rightarrow x^3<y^3$, bármely x,y valós számok esetén.
58) $x<y \rightarrow x^2<y^2$, bármely x,y valós számok esetén.
59) $x^3<y^3 \rightarrow x<y$, bármely x,y valós számok esetén.
60) $x^2<y^2 \Rightarrow x<y$, bármely x,y valós számok esetén.
61) $\sqrt[3]{x}<\sqrt[3]{y} \Rightarrow x<y$, bármely x,y valós számok esetén.
62) $\sqrt{x}<\sqrt{y} \Rightarrow x<y$, bármely x,y nemnegatív számok esetén.
63) $a^x=a^y \leftrightarrow x=y$, bármely $a>0, a\neq 1, x,y$ valós számok esetén.
64) $a^x>a^y \rightarrow x>y$, bármely $a>0, a\neq 1, x,y$ valós számok esetén.
65) $a^x>a^y \rightarrow x<y$, bármely $a>0, a\neq 1, x,y$ valós számok esetén.
66) $x<y \Rightarrow a^x<a^y$, bármely $a>0, a\neq 1, x,y$ valós számok esetén.
67) $x<y \Rightarrow a^x>a^y$, bármely $a>0, a\neq 1, x,y$ valós számok esetén.
68) $a^x>a^y \leftrightarrow x>y$, bármely $a>1, x,y$ valós számok esetén.
69) $a^x>a^y \leftrightarrow x<y$, bármely $0<a<1$, x, y valós számok esetén.
70) $a^x\cdot b^y=(a\cdot b)^{x+y}$, bármely a,b,x,y valós számok esetén.
71) $a^x+a^y=a^z+a^t \rightarrow x+y=z+t$, bármely $a>0, a\neq 1, x,y,z,t$ valós számok esetén.
72) $a^x\cdot a^y=a^z\cdot a^t \rightarrow x+y=z+t$, bármely $a>0, a\neq 1, x,y,z,t$ valós számok esetén.
73) $a^x\cdot b^y=a^z\cdot b^t \rightarrow x=z$ és $y=t$, bármely $a,b>0$, $a\neq 1, b\neq 1$ x,y,z,t valós számok esetén.
74) $a^x\cdot b^y=a^z\cdot b^t \rightarrow x=z$ és $y=t$, bármely $a,b \in \mathbb{N}^*-\{1\}$, $(a,b)=1$, x,y,z valós számok esetén.
75) $\dfrac{a^{kx}}{b^{ky}}=\dfrac{a^x}{b^y}$, bármely $a,b>0$, $a\neq 1, b\neq 1$, $k\neq 0$; x,y zérótól különböző valós számok esetén.
76) $x=y \Rightarrow \sin x=\sin y$, bármely x,y valós számok esetén.
77) $\sin x=\sin y \Rightarrow x=y$, bármely x,y valós számok esetén.
78) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, bármely x valós szám esetén.
79) $\sin x+\cos x=1$, bármely x valós szám esetén.
80) $\sin(x+y)=\sin x+\sin y$, bármely x,y valós számok esetén.
81) $\sin(xy)=\sin x\sin y$, bármely x,y valós számok esetén.
82) $\sin 2x=2\sin x$, bármely x valós szám esetén.
83) $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{2}$, bármely x valós szám esetén.

CamScannerrel szkennelve

84) $2\sin\frac{x}{2}=\sin x$, bármely x valós szám esetén.

85) $\sin 2x=2\sin x\cos x$, bármely x valós szám esetén.

86) $a=b \Rightarrow \log_c a=\log_c b$, bármely $c>0, c\neq 1$, $a,b>0$ számok esetén.

87) $\log_c a=\log_c b \Rightarrow a=b$, bármely $c>0, c\neq 1$, $a,b>0$ számok esetén.

88) $a\leq b \Rightarrow \log_c a\leq \log_c b$, bármely $c>0, c\neq 1$, $a,b>0$ számok esetén.

89) $a\leq b \Rightarrow \log_c a\geq \log_c b$, bármely $c>0, c\neq 1$, $a,b>0$ számok esetén.

90) $\log_c a\geq \log_c b \Rightarrow a\geq b$, bármely $c>1$, $a,b>0$ számok esetén.

91) $\log_c a\geq \log_c b \Rightarrow a\leq b$, bármely $0<c<1$, $a,b>0$ számok esetén.

92) $\frac{\log a}{\log b}=\frac{a}{b}$, bármely $a,b>0$, $b\neq 1$ számok esetén.

93) $\log a+\log b=\log c \Rightarrow a+b=c$, bármely $a,b,c>0$ számok esetén.

94) $\log(ab)=\log a+\log b$, bármely $a,b>0$ számok esetén.

95) $\log(a\cdot b)=\log a\cdot\log b$, bármely $a,b>0$ számok esetén.

96) $\log(a+b)=\log a\cdot\log b$, bármely $a,b>0$ számok esetén.

97) $\log(a+b)=\log a+\log b$, bármely $a,b>0$ számok esetén.

98) $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$, bármely $a,b>0$ számok esetén.

99) $\log a:\log b=\log\frac{a}{b}$, bármely $a,b>0$ számok esetén.

100) $\frac{\log a}{\log b}=\log(a-b)$, bármely $a>b>0$, $b\neq 1$ számok esetén.

A felírt állítások közül a következők HAMISAK:
2.,3.,6.,8.,10.,11.,13.,15.,17.,19.,21.,22.,25.,27.,29.,31.,32.,34.,35.,37.,38.,40.,42.,43.,44.,45.,47.,48.,51.,53.,55.,56.,58.,60.,64.,65.,66.,67.,70.,71.,73.,75.,77.,79.,80.,81., 82.,83.,84.,88.,89.,92.,93.,95.,96.,97.,99.,100.

A jobb megértés céljából javasoljuk, hogy az előbbiekben felsorolt hamis állítások mindegyikére a tanulók szerkesszenek példákat! (Esetenként jól figyeljenek a negatív számokra is!)

Ami a teszt értékelését illeti: az elért helyes válaszok száma, pontosan százalékban fejezi ki a teljesítményeteket.

Befejezésül, egy érdekes hamis analógiás következtetést mutatunk be:

"Igazoljuk, hogy
$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \quad (1)$$
bármely $x\neq 2k\pi, k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*$ esetén."

Amennyiben igaz lenne a $\sin(x+y)=\sin x+\sin y$ és $\sin(xy)=\sin x\sin y$ (80., illetve 81.) hamis képletek, úgy az
$$x+2x+\ldots+nx=\frac{n(n+1)}{2}x=\frac{\frac{nx}{2}\cdot\frac{(n+1)x}{2}}{\frac{x}{2}}, \quad x\neq 0, n\in\mathbb{N}^* \quad (2)$$
azonosságból kiindulva, az említett 80. és 81. "képletek" ismételt alkalmazásával, pontosan az (1)-et kapnánk. Persze ez teljesen helytelen. De vajon teljesen értéktelen az előbbi gondolat? Egyáltalán nem. Sőt, az (1) összefüggés *memorizálására*, nagyon jó alkalom a (2) képlet adta lehetőség, amit könnyű észben tartani, mert csak egy-egy "sin"-t kell mindegyik tag elé "*odagondolni*".