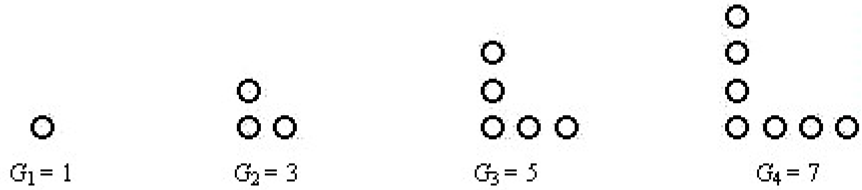
A figurális számokról (III.)

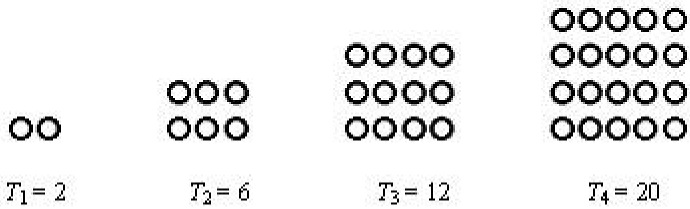
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Az előző részekben megismerkedhettünk a gnómonszámokkal is, amelyek a következő alakúak voltak:



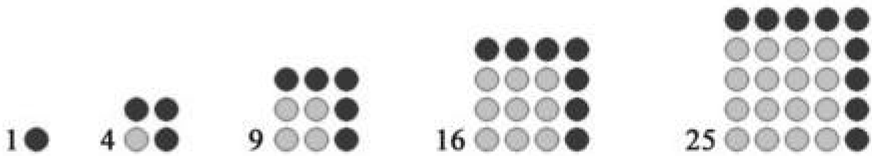
Ezeknek általános alakjuk $G_n = 2n + 1$.

Ezután megismerkedtünk a téglalapszámokkal is:



Ezeknek az általános alakjuk $T_n = n(n+k)$, ahol $k \in N^*$ adott szám. Az ábrán *k=1*.

Ugyancsak az előző részekben írtunk a négyzetszámokról is, vagyis olyan számok amelyek figuráslisan négyzettel szemléltethetők:



Ezeknek általános alakjuk $N_n = n^2$. A négyzetszámok térbeli általánosításai pedig a köbszámok, amelyek általános képlete $K_n = n^3$.

Mindazon kívül, hogy a figurális számok jól szemléltetnek bizonyos számokat, a fő tulajdonságuk az, hogy számos összefüggés szemléltetésére is alkalmasak.

Ebben a dolgozatban azt mutatjuk meg, hogy az ókori Görögök hogyan vontak gyököt, és hogyan oldottak meg másodfokú egyenletet figurális számok segítségével.

A négyzetgyök kettő (a $\sqrt{2}$), más néven Püthagorasz-állandó, egy pozitív, valós szám, melyet önmagával szorozva 2-t kapunk. A négyzetgyök kettő valószínűleg az elsőként megismert irracionális szám. A geometriai jelentősége az, hogy ez a hossza az egységnyi oldalú négyzet átlójának, ami levezethető a Pitagorasz-tételből.

Számos módszer van a $\sqrt{2}$ közelítő értékének számolására, melyek a kifejezéseket egész számok arányaként, vagy tizedestörtként közelítik meg. Erre a legegyszerűbb algoritmus, amely sok számítógép és számológép alapja, a babiloni módszer a négyzetgyök számolására. Ez a következőképp működik:

Először vegyünk egy tetszőleges becslést. A becslés pontossága nem számít, csak azt befolyásolja, hányszor kell megismételni a lépéseket, hogy elérjünk egy bizonyos pontosságú közelítést. Ezután használhatjuk a becslésünket a következő rekurzív számításban:

$$F_{n+1} = \frac{F_n + \frac{2}{F_n}}{2}.$$

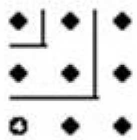
Minél több ismétlés van az algoritmusban (egyre több számolást kell elvégezni, egyre nagyobb n-el), annál jobb becslést kapunk a $\sqrt{2}$ közelítő értékére.

Az ókori Görögök, az általuk bevezetett figurális számokkal roppant ötletesen vontak négyzetgyököt is! Nézzük a következő példákat:

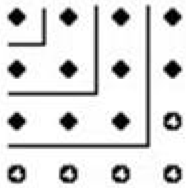
<u>1. feladat</u>: Számítsuk ki a figurálisan a $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{22}$ számok megközelítő értékeit!

Megoldás: Az ókori Görögök a következőképpen jártak el:

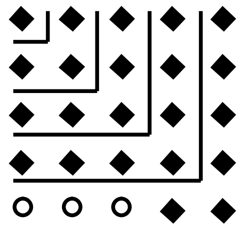
1) Keressük meg például azt a két egymásutáni n^2 és $(n+1)^2$ négyzetszámot, amelyek közrefogják a szóbanforgó számot. Esetünkben $2^2 < 8 < 3^2$, $3^2 < 8 < 4^2$, $4^2 < 22 < 5^2$.
2) Ábrázoljuk figuratívan az n^2 négyzetszámot, majd bővítsük ki a (*2n+1*) gnómonszámmal úgy, hogy megkapjuk az $(n+1)^2$ négyzetszámot.
3) Ezután színezzük sötétre a 8, illetve 11, illetve 22 pöttyöt, a többit hagyjuk világosan, ahogy az alábbi ábrák mutatják:



$\sqrt{8} \approx 2\frac{4}{5}$



$\sqrt{11} \approx 3\frac{2}{7}$



$\sqrt{22} \approx 4\frac{6}{9}$

4) Az eredmény egészrésze az n^2-ből az n lesz, esetünkben rendre 2, 3, illetve 4, ami éppen annak a legnagyobb négyzetszámnak a „mérete” amely fekete jelekből áll. (az ábrákon sorra leválasztottuk a gnómonszámokat, ezek száma is ugyanaz mint az n)
5) Ezután képeztük a törtrészt alkotó közönséges törteket: a nevezőjük a gnómonszám pöttyeinek a száma, a *2n+1* és a számláló a gnómon számban szereplő fekete jelek száma, esetünkben rendre $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{7}$ illetve $\frac{6}{9}$.

Ezzel meg is volnánk, és máris megkaptuk a $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{22}$ számok megközelítő értékeit, ahogyan az előző ábrákon is látható.

Első kérdésünk ami felmerülhet: vajon mennyire pontosak ezek a megközelítések? Nézzük csak:

$$\left(2\frac{4}{5}\right)^2 = 7{,}84 \approx 8 \qquad \left(3\frac{2}{7}\right)^2 = 10{,}79 \approx 11 \qquad \left(4\frac{6}{9}\right)^2 = 21{,}77 \approx 22$$

Mondhatni, hogy valóban jó megközelítéseket kaptunk!

Érdemes felfigyeljünk arra, hogy az előbbi „Görög-módszerrel” tulajdonképpen az $x^2 = m$ egyenletnek a pozitív gyökét határoztuk meg, ha $m \in N^*$ nem négyzetszám.

Nézzük ellenben mai szemmel, hogy mi is történt az előbbiekben, az $x^2 = m$ egyenlet pozitív gyökének a meghatározása során?

Láttuk tehát, hogy olyan $n \in N^*$ számot kerestünk, amelyre $n^2 < m < (n+1)^2$. Legyen x_0 a $\sqrt{m}$ megközelítő értéke. Az x_0 egész része éppen n. A törtrészének a nevezőjébe az $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ gnómonszám kerül, a számlálóba pedig $(m-n^2)$, vagyis $x_0 = n + \frac{m-n^2}{2n+1}$. Az ókori Görögök szerint tehát $\sqrt{m} \approx n + \frac{m-n^2}{2n+1}$. Nézzük csak meg, hogy mennyire is pontos ez a megközelítés. Az előbbiekben láttuk, hogy a megközelítő értékek hiánnyal közelítették meg a gyökmennyiséget. Éppen ezért, ha $m = n^2 + k$, akkor

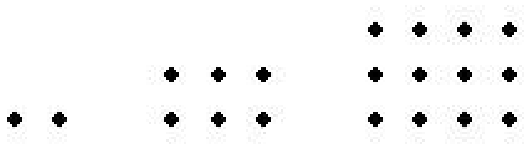
$x_0 = n + \frac{k}{2n+1}$, ahol $k \in \{1, 2, ..., 2n\}$. Becsüljük fel a következő eltérést: $m - x_0^2 = n^2 + k - \left(n + \frac{k}{2n+1}\right)^2 = -\frac{1}{(2n+1)^2}k^2 + \frac{1}{(2n+1)}k$. Tekintsük most a következő másodfokú függvényt: $f(k) = -\frac{1}{(2n+1)^2}k^2 + \frac{1}{(2n+1)}k$. Látható, hogy a függvénynek maximuma van, mégpedig a $k_{\max} = -\frac{\frac{1}{(2n+1)}}{-\frac{2}{(2n+1)^2}} = n + \frac{1}{2}$ értékre, tehát $f(k) < f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = 0,25$. Tehát $0 < m - x_0^2 < 0,25$, vagyis a megközelítés pontossága nem több, mint 0,25 ! És ez meglepőnek számíthat, hiszen a Görögök csupán a figurális számokat használták! Elgondolkodtató eredmény, nem de?

Az ókori Görögök ellenben nem álltak meg itt. Megpróbálták megkeresni az $x^2 + x = m$ egyenlet pozitív megoldásának a megközelítő értékét is.

Ezúttal nem a négyzetszámokat, hanem a téglalapszámokat használták, és az algoritmusuk ugyan azokból a lépésekből állt.

<u>2. feladat</u>: Keressük meg figurálisan az $x^2 + x = 9$ és $x^2 + x = 22$ egyenletek pozitív gyökének a megközelítő értékeit

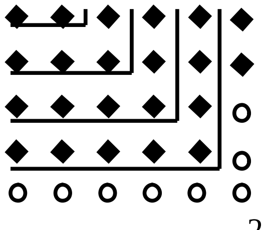
Megoldás: Az ókori Görögök a következőképpen jártak el: mivel az egyenlet baloldala $x^2 + x$, ezért elkezdték ábrázolni az $n^2 + n = n(n+1)$ alakú téglalapszámokat:



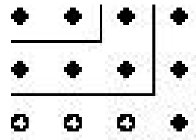
2 6 12

1) Keressük meg például azt a két egymásutáni $n(n+1)$ és $(n+1)(n+2)$ téglalapszámot, amelyek közrefogják a szóbanforgó számot. Esetünkben $2 \cdot 3 < 9 < 3 \cdot 4$, illetve $4 \cdot 5 < 22 < 5 \cdot 6$.
2) Ábrázoljuk figuratívan az $n \cdot (n+1)$ téglalapszámot, majd bővítsük ki a $(n+1)(n+2) - n(n+1) = 2n + 2$ gnómonszámmal úgy, hogy megkapjuk a $(n+1)(n+2)$ téglalapszámot.

3) Ezután színezzük sötétre a 9, illetve 22 pöttyöt, a többit hagyjuk világosan, ahogy az alábbi ábrák mutatják:



$x^2 + x = 22 \Rightarrow x \approx 4\frac{2}{10}$



$x^2 + x = 9 \Rightarrow x \approx 2\frac{3}{6}$

4) Az eredmény egészrésze az $n(n+1)$-ből az n lesz, esetünkben rendre 2, illetve 4, ami éppen annak a legnagyobb $n(n+1)$ típusú téglalapszám a „mérete” amely fekete jelekből áll. (az ábrákon sorra leválasztottuk a gnómonszámokat, ezek száma is ugyanaz mint az n)
5) Ezután képeztük a törtrészt alkotó közönséges törteket: a nevezőjük a gnómonszám pöttyeinek a száma, a $(n+1)(n+2)-n(n+1)=2n+2$ és a számláló a gnómon számban szereplő fekete jelek száma, esetünkben rendre $\frac{3}{6}$, illetve $\frac{2}{10}$.

Ezzel meg is volnánk, és máris megkaptuk a $x^2+x=9$ és $x^2+x=22$ egyenletek pozitív gyökének a megközelítő értékeit, ahogyan az előbbi ábrán is láthatók.
Első kérdésünk ami felmerülhet: vajon mennyire pontosak ezek a megközelítések?
Nézzük csak: $\left(2\frac{3}{6}\right)^2+2\frac{3}{6}=8,75\approx 9$ illetve $\left(4\frac{2}{10}\right)^2+4\frac{2}{10}=21,84\approx 22$. Ezúttal is meglepően pontosak a megközelítések!

Nézzük ellenben mai szemmel, hogy mi is történt az előbbiekben, az $x^2+x=m$ egyenlet pozitív gyökének a meghatározása során?

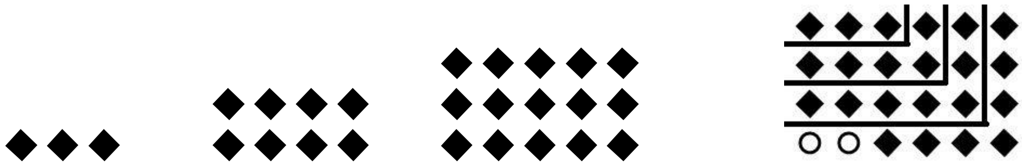
Láttuk tehát, hogy olyan $n\in N^*$ számot kerestünk, amelyre $n(n+1)<m<(n+1)(n+2)$. Legyen x_0 az $x^2+x=m$ megközelítő megoldásának értéke. Az x_0 egész része éppen n. A törtrészének a nevezőjébe az $(n+1)(n+2)-n(n+1)=2n+2$ gnómonszám kerül, a számlálóba pedig $(m-n(n+1))$, vagyis $x_0=n+\frac{m-n(n+1)}{2n+2}$. Az ókori Görögök szerint tehát $\sqrt{m}\approx n+\frac{m-n(n+1)}{2n+2}$. Nézzük csak meg, hogy mennyire is pontos ez a megközelítés. Az előbbiekben láttuk, hogy a megközelítő értékek hiánnyal közelítették meg a gyökmennyiséget. Éppen ezért, ha $m=n^2+k$, akkor $x_0=n+\frac{k}{2n+2}$, ahol $k\in\{1,2,...,2n+1\}$.
Becsüljük fel a következő eltérést:

$m-x_0^2-x_0=n(n+1)+k-\left(n+\frac{k}{2n+2}\right)^2-n-\frac{k}{2n+2}=-\frac{1}{(2n+2)^2}k^2+\frac{1}{(2n+2)}k$. Tekintsük most a következő másodfokú függvényt: $f(k)=-\frac{1}{(2n+2)^2}k^2+\frac{1}{(2n+2)}k$. Látható, hogy a függvénynek maximuma van, mégpedig a $k_{\max}=-\frac{\frac{1}{(2n+2)}}{-\frac{2}{(2n+2)^2}}=n+1$ értékre, tehát

$f(k)\leq f\left(n+1\right)=\frac{1}{4}=0,25$. Tehát $0<m-x_0^2-x_0<0,25$, vagyis a megközelítés pontossága ezúttal sem több, mint 0,25 ! És ez meglepőnek számíthat, hiszen a Görögök csupán a figurális számokat használták! Elgondolkodtató ez az eredmény is, nem de?

Az ókori Görögök ellenben nem álltak meg itt. Megpróbálták megkeresni az $x^2+2x=m$ egyenlet pozitív megoldásának a megközelítő értékét is.

3. feladat: Keressük meg figurálisan az $x^2+2x=22$ egyenletek pozitív gyökének a megközelítő értékét!
Megoldás: Az ókori Görögök a következőképpen jártak el: mivel az egyenlet baloldala x^2+2x, ezért elkezdték ábrázolni az $n^2+2n=n(n+2)$ alakú téglalapszámokat:



1×3 **2×4** **3×5** $x^2+2x=22 \Rightarrow x \approx 3\frac{7}{9}$

1) Keressük meg például azt a két egymásutáni $n(n+2)$ és $(n+1)(n+3)$ téglalapszámot, amelyek közrefogják a szóbanforgó számot. Esetünkben $3\cdot 5<22<4\cdot 6$.
2) Ábrázoljuk figuratívan az $n\cdot(n+2)$ téglalapszámot, majd bővítsük ki a $(n+1)(n+3)-n(n+2)=2n+3$ gnómonszámmal úgy, hogy megkapjuk a $(n+1)(n+3)$ téglalapszámot.
3) Ezután színezzük sötétre a 22 pöttyöt, a többit hagyjuk világosan, ahogy az előbbii ábra mutatja.
4) Az eredmény egészrésze az $n(n+2)$-ből az n lesz, esetünkben 3, ami éppen annak a legnagyobb $n(n+2)$ típusú téglalapszám a „mérete” amely fekete jelekből áll. (az ábrákon sorra leválasztottuk a gnómonszámokat, ezek száma is ugyanaz mint az n)
5) Ezután képeztük a törtrészt alkotó közönséges törteket: a nevezőjük a gnómonszám pöttyeinek a száma, a $(n+1)(n+3)-n(n+2)=2n+3$ és a számláló a gnómon számban szereplő fekete jelek száma, esetünkben $\frac{7}{9}$.

Ezzel meg is volnánk, és máris megkaptuk az $x^2+2x=22$ egyenletek pozitív gyökének a megközelítő értékeit, ahogyan az előbbi ábrán is látható.
Első kérdésünk ami felmerülhet: vajon mennyire pontosak ezek a megközelítések?
Nézzük csak: $\left(3\frac{7}{9}\right)^2+2\cdot 3\frac{7}{9}=21,76\approx 22$. Ezúttal is meglepően pontos a megközelítés!

Nézzük ellenben mai szemmel, hogy mi is történt az előbbiekben, az $x^2+2x=m$ egyenlet pozitív gyökének a meghatározása során?

Nézzük ellenben mai szemmel, hogy mi is történt az előbbiekben, az $x^2+2x=m$ egyenlet pozitív gyökének a meghatározása során?

Láttuk tehát, hogy olyan $n\in N^*$ számot kerestünk, amelyre $n(n+2)<m<(n+1)(n+3)$. Legyen x_0 az $x^2+2x=m$ megközelítő megoldásának értéke. Az x_0 egész része éppen n. A törtrészének a nevezőjébe az $(n+1)(n+3)-n(n+2)=2n+3$ gnómonszám kerül, a számlálóba pedig $(m-n(n+2))$, vagyis $x_0=n+\frac{m-n(n+2)}{2n+3}$. Az ókori Görögök szerint tehát $\sqrt{m}\approx n+\frac{m-n(n+2)}{2n+3}$. Nézzük csak meg, hogy mennyire is pontos ez a megközelítés. Az előbbiekben láttuk, hogy a megközelítő értékek hiánnyal közelítették meg a gyökmennyiséget. Éppen ezért, ha $m = n^2 + k$, akkor $x_0 = n + \frac{k}{2n+3}$, ahol $k \in \{1, 2, ..., 2n+2\}$. Becsüljük fel a következő eltérést:

$$m - x_0^2 - 2x_0 = n(n+2) + k - \left(n + \frac{k}{2n+3}\right)^2 - 2n - \frac{2k}{2n+3} = -\frac{1}{(2n+3)^2}k^2 + \frac{1}{(2n+3)}k.$$

Tekintsük most a következő másodfokú függvényt: $f(k) = -\frac{1}{(2n+3)^2}k^2 + \frac{1}{(2n+3)}k$.

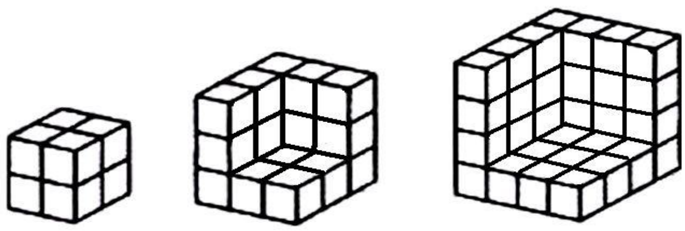
Látható, hogy a függvénynek maximuma van, mégpedig a $k_{\max} = -\frac{\frac{1}{(2n+3)}}{-\frac{2}{(2n+3)^2}} = n + \frac{3}{2}$

értékre, tehát $f(k) < f\left(n + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} = 0,25$. Tehát $0 < m - x_0^2 - x_0 < 0,25$, vagyis a megközelítés pontossága ezúttal sem több, mint 0,25 !

Könnyen belátható, hogy a „Görög módszerrel” minden $x^2 + kx = m$ egyenlet megoldható, ahol k, m pozitív egész számok.

4. feladat: Számítsuk ki a figurálisan a $\sqrt[3]{22}$ szám megközelítő értékét!

Megoldás: Ez tulajdonképpen az 1. feladat térbeli megfelelője, most a köbszámokat használjuk, a gnómonszámok helyett a térbeli gnómonszámokat:



Ezek képlete $(n+1)^3 - n^3 = 3n(n+1)+1$, és az az m számot keressük, amelyre $n^3 < m < (n+1)^3$. Az előbbi gondolatmenetet követve $\sqrt[3]{m} \approx n + \frac{m - n^3}{3n(n+1)+1}$ adódik, a feladatban pedig n= 2 és m= 22, ezért $\sqrt[3]{22} \approx 2\frac{14}{19}$.

5. feladat: Keressük meg figurálisan az $x^3 + x = 22$ egyenletek egyetlen pozitív gyökének a megközelítő értékét!

Megoldás: Ezúttal is az előbbieket követjük, itt ezúttal téglatestszámokról van szó. Most tehát az $x^3 + x = m$ egyenlet megoldásáról van szó, $n(n^2+1) < m < (n+1)(n^2+2n+2)$, továbbá $(n+1)(n^2+2n+2) - n(n^2+1) = 3n(n+1)+2$ és $x_0 = n + \frac{m - n(n^2+1)}{3n(n+1)+2}$. Az $n=2$ és $m= 22$ esetben kapjuk, hogy $x_0 = 2\frac{12}{20}$, ami az $x^3 + x = 22$ egyenletnek egyetlen valós megoldásának a megközelítő értéke.