Másodrendű mátrixok hatványozása indukcióval

Tuzson Zoltán Székelyudvarhely

Ebben a paragrafusban, másodrendű mátrixok hatványozásával foglalkozunk. A hatványozást, mint ismételt szorzást értelmezzük, de értelmezhető a következő rekurzív összefüggéssel is: $A^1 = A,\ A^n = A \cdot A^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Egy hatványműveletet akkor tekintünk teljesen elvégzettnek, amikor az A^n mátrix minden elemét egy képlettel (relációval) adjuk meg ami minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén érvényes. A gyakorlatban ellenben egy-egy ilyen képlet megállapítása nem mindig egyszerű!

A továbbiakban a mátrixok hatványozására általános érvényű megoldási módszereket mutatunk be. Kezdjük a leg elterjedtebb módszerrel:

I. Az indukció módszere

Ez a módszer a matematikai indukcióra épül, és a lényege az, hogy sorra kiszámítjuk az $A^2, A^3, A^4, \ldots$ hatványokat, és az elemekre megpróbálunk megállapítani egy képletet. Így a megállapított képletekkel feltételezzük, hogy A^k igaz, és az $A^n = A \cdot A^{n-1}$ értelmezése alapján bebizonyítjuk, hogy a megállapított képlet igaz A^{k+1} esetén is.

Ezt a módszer előszeretettel alkalmazzuk a mátrixok hatványozására, de a sikernek egyetlen feltétele, hogy sikerüljön korrektül megsejtenünk az A^k hatvány elemeire érvényes képleteket. Ez bizony nem minden esetben egyszerű dolog!

A következőkben megoldott feladatok által szemléltetjük a módszer lényegét, hatékonyságát és korlátait.

1. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: Sorra kiszámítjuk, és felírjuk, hogy $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ez már elegendő ahhoz, hogy felírjuk a sejtésünket, hogy $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ esetén. Bizonyítani fogjuk, hogy $A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ is igaz. Ez valóban így van, mert $A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2k+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

2. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: Sorra kiszámítjuk, és felírjuk, hogy $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$. Ez már elegendő ahhoz, hogy felírjuk a sejtésünket, hogy $A^k = \begin{bmatrix} k+1 & k \\ -k & -k+1 \end{bmatrix}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ esetén. Bizonyítani fogjuk, hogy $A^{k+1} = \begin{bmatrix} k+2 & k+1 \\ -k-1 & -k \end{bmatrix}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ is igaz. Ez valóban így van, mert $A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k+1 & k \\ -k & -k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+2 & k+1 \\ -k-1 & -k \end{bmatrix}$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

3. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: Sorra kiszámítjuk, és felírjuk, hogy $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 81 \end{bmatrix}$. Ez már elegendő ahhoz, hogy felírjuk a sejtésünket, hogy $A^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ esetén. Bizonyítani fogjuk, hogy $A^{k+1}=\begin{bmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 3^{k+1} \end{bmatrix}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$ is igaz. Ez valóban így van, mert $A^{k+1}=A\cdot A^k=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 3^{k+1} \end{bmatrix}$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

4. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: Sorra kiszámítjuk, és felírjuk, hogy $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $A^3=\begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$, $A^4=\begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 0 & 81 \end{bmatrix}$. Ha jól megfigyeljük az elemeket, akkor a következő sejtésünk alakulhat ki: $A^k=\begin{bmatrix} 1 & 3^k-1 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$ esetén. Bizonyítani fogjuk, hogy $A^{k+1}=\begin{bmatrix} 1 & 3^{k+1}-1 \\ 0 & 3^{k+1} \end{bmatrix}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$ is igaz. Ez valóban így van, mert $A^{k+1}=A\cdot A^k=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3^k-1 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3^{k+1}-1 \\ 0 & 3^{k+1} \end{bmatrix}$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés: a feladatunk könnyűszerrel általánosítható, éspedig, ha $A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$ akkor indukcióval könnyűszerrel igazolható, hogy $A^n=\begin{bmatrix} a^n & (a+b)^n-1 \\ 0 & (a+b)^n \end{bmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. A bizonyítás elvégzését az érdeklődő Olvasóra bízzuk!

5. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: Sorra kiszámítjuk, és felírjuk, hogy $A^2 = 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = -2A$, $A^4 = -2^2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^5 = 2^3 A$. Ezek alapján az a sejtésünk, hogy $A^{2k} = (-1)^{k+1} \cdot 2^k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ és $A^{2k+1} = (-1)^k 2^k \cdot A$. Ezt két indukciós következtetéssel fogjuk belátni bizonyítva, hogy $A^{2k+2} = (-1)^{k+2} \cdot 2^{k+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ és $A^{2k+3} = (-1)^{k+1} 2^{k+1} \cdot A$. Valóban, $A^{2k+2} = A \cdot A^{2k+1} = A \cdot (-1)^k A = (-1)^k \cdot 2^k \cdot A^2 = (-1)^k \cdot 2^k \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} =$ $(-1)^{k+2} \cdot 2^{k+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Teljesen hasonlóan $A^{2k+3} = A^2 \cdot A^{2k+1} =$ $= A^2 \cdot (-1)^k 2^k \cdot A = -2(-1)^k 2^k \cdot A = (-1)^{k+1} 2^{k+1} \cdot A$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

6. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: Sorra kiszámítjuk, és felírjuk, hogy $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 36 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 16 & 96 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$. Hosszabb megfigyelés után sem adódik azonnal a képlet a $3, 12, 36, 96$ sorozat tagjaira. Éppen ezért az az ötletünk támadhat, hogy inkább oldjuk meg az általánosabb feladatot, vagyis tekintsük az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ mátrixot, és hatványozzuk ezt, mert ebben az esetben a betűkifejezések nem vonhatók össze, ezért sokkal több esélyünk van, hogy egy képletet kapjunk. Ezután partikularizálással pedig visszakaphatjuk a kitűzött feladatunk megoldását. Valóban, $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2 \cdot a^1 \cdot b \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3 \cdot a^2 \cdot b \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 4 \cdot a^3 \cdot b \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}$ és ennek alapján feltételezzük, hogy $A^k = \begin{bmatrix} a^k & k\cdot a^{k-1}\cdot b \\ 0 & a^k \end{bmatrix}$. Így az $A^{k+1} = A\cdot A^k = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a^k & k\cdot a^{k-1}\cdot b \\ 0 & a^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)\cdot a^k\cdot b \\ 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$ alapján bizonyítottuk a képletet.

Ennek alapján, ha $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, akkor $A^k = \begin{bmatrix} 2^k & 3\cdot k\cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$ $\forall k\in\mathbb{N}^*$ esetén.

7. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: Sorra kiszámítjuk, és felírjuk, hogy $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 16 & 45 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$. Hosszabb megfigyelés után sem adódik azonnal a képlet a $3, 9, 21, 45$ sorozat tagjaira. Éppen ezért az az ötletünk támadhat, hogy inkább oldjuk meg az általánosabb feladatot, vagyis tekintsük az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ mátrixot, és hatványozzuk ezt, mert ebben az esetben a betűkifejezések nem vonhatók össze, ezért sokkal több esélyünk van, hogy egy képletet kapjunk. Ezután partikularizálással pedig visszakaphatjuk a kitűzött feladatunk megoldását. Valóban, $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & b(a^2+ac+c^2) \\ 0 & c^3 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} a^4 & b(a^3+a^2c+ac^2+c^3) \\ 0 & c^4 \end{bmatrix}$

és ennek alapján feltételezzük, hogy $A^k = \begin{bmatrix} a^k & b\dfrac{a^k-c^k}{a-c} \\ 0 & c^k \end{bmatrix}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$. Így az

$A^{k+1} = A\cdot A^k = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a^k & b\dfrac{a^k-c^k}{a-c} \\ 0 & c^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & b\dfrac{a^{k+1}-c^{k+1}}{a-c} \\ 0 & c^{k+1} \end{bmatrix}$ alapján bizonyítottuk a képletet.

Ennek alapján, ha $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, akkor $A^n=\begin{bmatrix} 2^n & 3\cdot\left(2^n-1\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\forall k\in\mathbb{N}^*$ esetén.

8. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: Sorra kiszámítjuk, és felírjuk, hogy $A^2=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $A^3=\begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$, $A^4=\begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix}$. Hosszabb megfigyelés után sem adódik azonnal a képlet a $2,5,14,41$ sorozat tagjaira. Éppen ezért az az ötletünk támadhat, hogy inkább oldjuk meg az általánosabb feladatot, vagyis tekintsük az $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ mátrixot, és hatványozzuk ezt, mert ebben az esetben a betűkifejezések nem vonhatók össze, ezért sokkal több esélyünk van, hogy egy képletet kapjunk. Ezután partikularizálással pedig visszakaphatjuk a kitűzött feladatunk megoldását. Valóban,

$$A^2=\begin{bmatrix} \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2} & \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{2} \\ \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{2} & \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2} \end{bmatrix},$$

$$A^3=\begin{bmatrix} \frac{(a+b)^3+(a-b)^3}{2} & \frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2} \\ \frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2} & \frac{(a+b)^3+(a-b)^3}{2} \end{bmatrix},$$

$$A^4=\begin{bmatrix} \frac{(a+b)^4+(a-b)^4}{2} & \frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{2} \\ \frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{2} & \frac{(a+b)^4+(a-b)^4}{2} \end{bmatrix}$$

és ennek alapján feltételezzük, hogy

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{(a+b)^k+(a-b)^k}{2} & \frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2} \\ \frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2} & \frac{(a+b)^k+(a-b)^k}{2} \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$ Így az

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{(a+b)^k+(a-b)^k}{2} & \frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2} \\ \frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2} & \frac{(a+b)^k+(a-b)^k}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(a+b)^{k+1}+(a-b)^{k+1}}{2} & \frac{(a+b)^{k+1}-(a-b)^{k+1}}{2} \\ \frac{(a+b)^{k+1}-(a-b)^{k+1}}{2} & \frac{(a+b)^{k+1}+(a-b)^{k+1}}{2} \end{bmatrix}$$ alapján bizonyítottuk a

képletet. Ennek alapján, ha $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, akkor $A^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{bmatrix}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Befejezésül nézzünk két olyan feladatot, amit szintén indukcióval oldunk meg, de a feladat nem az előző megoldási ötleteken alapul:

9. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: Ha kiszámítjuk az A^2 mátrixot, könnyűszerrel észrevesszük, hogy $A^2 = 2A - I_2$. Ez alapján azonban felírhatjuk, hogy $A^3 = 2A^2 - A = 2(2A - I_2) - A = 3A - 2I_2$. Ezek alapján az a sejtésünk támadhat, hogy $A^k = k \cdot A - (k-1)I_2$. Így bizonyítani kell, hogy $A^{k+1} = (k+1) \cdot A - kI_2$. Ez valóban igaz, mert $A^{k+1} = A \cdot A^k = A\left(k \cdot A - (k-1)I_2\right) = k \cdot A^2 - (k-1)A = k(2A - I_2) - (k-1)A = (k+1) \cdot A - kI_2$.

10. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: Sorra kiszámítjuk, és felírjuk, hogy $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $A^5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Észrevehetjük, hogy a mátrixok elemei a következő sorozat tagjai: $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$. Ezt a sorozatot a Fibonacci sorozatnak hívják, és rekurziós összefüggéssel így értelmezik: $F_1 = F_2 = 1$ és $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Így azonnal megfogalmazhatjuk az indukciós feltevést, éspedig: $A^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}$. Bizonyítani fogjuk, hogy $A^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$. Valóban, felírható, hogy

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F & F_k + F_{k-1} \\ F_k + F_{k-1} & F_{k-1} + F_{k-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}.$$

Pillanatnyilag meg kell elégednünk ezzel az eredménnyel, de jelezzük, hogy a IV. részben, a karakterisztikus egyenlet segítségével, a végeredményt zárt formában, képletekkel is felírjuk majd.

Végezetül, a bemutatottak jobb elmélyítése végett, az érdeklődő Olvasónak javasoljuk a következő feladatok megoldását:

Gyakorló feladatok I.

A következő A mátrixok esetén számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén:

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(6) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ (7) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ (8) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (9) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (10) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ ahol $a,b,c \in \mathbb{R}$. (11) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (12) $A = \begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix}$