Másodrendű mátrixok hatványozása felbontással

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a paragrafusban a mátrixok hatványozásának egy újabb módszerével ismerkedünk meg. Ez a módszer a Newton binomiális képleten alapszik, amelyik a következő:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

vagyis $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

III. A felbontás módszer

A módszer lényege a következő: a hatványozandó A mátrixra egy $A = xI_2 + yB$ alakú felbontást választunk azzal a céllal, hogy majd felírjuk az $A^n = \left(xI_2 + yB\right)^n$ hatványt. Ez akkor vezet eredményre, ha a $B^k = O_2$ áll elő valamilyen $k \in \mathbb{N}^*$ esetén, vagy $B^k = zB$ minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén. Ezután alkalmazva a Newton binomiális képletet, megkapjuk a végeredményt.

Indulásként nézzük a következő feladatot:

1. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: a többféle felírási lehetőségek közül válasszuk a következőt: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = I_2 + 4B$ ahol $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Könnyen észrevehető, hogy $B^2 = O_2$ ezért $B^k = O_2,\ \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ esetén. Ezért az $A^n = \left(I_2 + 4B\right)^n$ összefüggés alapján, a Newton binomiális képlettel azt kapjuk, hogy $A^n = I_2 + C_n^1 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5n & 4n \\ -4n & -3n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5n+1 & 4n \\ -4n & -3n+1 \end{bmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

2. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 3 & a \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ahol $a \in \mathbb{R}$.

Megoldás: felírhatjuk, hogy $A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -0 \end{bmatrix} = aI_2 + B$ ahol $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Könnyen észrevehető, hogy $B^2 = O_2$ ezért $B^k = O_2,\ \forall k \ge 2, k \in \mathbb{N}$ esetén. Ezért az $A^n = \left(aI_2 + B\right)^n$ összefüggés alapján, a Newton binomiális képlettel azt kapjuk, hogy $A^n = a^n I_2 + C_n^1 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 3n & a^n \end{bmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

3. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} b+a & -a \\ a & b-a \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

Megoldás: felírhatjuk, hogy $A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = aI_2 + bB$ ahol $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Könnyen észrevehető, hogy $B^2 = O_2$ ezért $B^k = O_2,\ \forall k \ge 2, k \in \mathbb{N}$ esetén. Ezért az $A^n = \left(aI_2 + bB\right)^n$ összefüggés alapján, a Newton binomiális képlettel azt kapjuk, hogy $A^n = a^n I_2 + bC_n^1 B = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} nb & -nb \\ nb & -nb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^n + nb & -nb \\ nb & a^n - nb \end{bmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Bizonyára hamar feltehető a következő kérdés: a különféle $A = xI_2 + yB$ felbontások közül melyik célravezető? Az előbbi feladat alapján, egyik célravezető felbontás az, amikor olyan B mátrixot kapunk, amelyikre $B^k = O_2$ áll elő valamilyen $k \in \mathbb{N}^*$ esetén. Az előző feladatban $B^k = O_2,\ \forall k \ge 2, k \in \mathbb{N}$ esetén. Ebből kiindulva felmerülnek a következő kérdések:

1. kérdés: Melyek azok a $B \ne O_2$ másodrendű valós elemű mátrixok, amelyekre $B^2 = O_2$?

Megoldás: Legyen $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor $B^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix}=O_2$ ahonnan adódik, hogy $a^2+bc=0, b(a+d)=0, c(a+d)=0, bc+d^2=0$ és a középső két egyenletből kiindulva, a lehetséges megoldások a következők: $B=\begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -a & -a \\ a & a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix} -a & a \\ -a & a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a & -a \\ a & -a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (*)

Tehát, ha kedvező felbontásokat akarunk kapni, akkor a B értéke egyike kell legyen az előző 6 mátrix valamelyikének.

2. kérdés: Melyek azok a $B\neq O_2$ másodrendű valós elemű mátrixok, amelyekre $B^3=O_2$?

Megoldás: Ismeretes, hogy bármely $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix teljesíti az $B^2-(a+d)B+(ad-bc)I_2=O_2$ úgynevezett Cayley-Hamilton féle karakterisztikus egyenletet. Ezt egyszerű számolásokkal könnyen ellenőrízhetjük. Innen azonnal kapjuk, hogy $B^3-(a+d)B^2+(ad-bc)B=O_2$. Jelen esetben, a $B^3=O_2$ feltétel mellett, az $a+d=Tr(B)=t$ és $ad-bc=\det B=\Delta$ jelölésekkel azt kapjuk, hogy $t\cdot B^2=\Delta B$, tehát $t\cdot B^3=\Delta B^2 \Leftrightarrow O_2=\Delta B^2$. Ha $B^2\neq 0$ akkor $B^2=tB \Rightarrow O_2=B^3=tB^2$ tehát $t=0$ és így $B^2=O_2$. Tehát $B^3=O_2 \Leftrightarrow B^2=O_2$.

3. kérdés: Melyek azok a $B\neq O_2$ másodrendű valós elemű mátrixok, amelyekre $B^k=O_2,\ k>3, k\in\mathbb{N}$?

Megoldás: mivel ennek a megoldása is azonos az előző kérdés megoldásával, ezért annak az igazolását, hogy $B^k = O_2,\ k > 3, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow B^2 = O_2$ az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

A feltett 3 kérdés és a rájuk adott válaszok alapján tehát beláttuk, hogy a módszerünk sikeres működésének a feltétele az, hogy az $A = xI_2 + yB$ felbontásban szereplő B mátrix a (*) alatti 6 mátrix valamelyike legyen.

Folytatásként nézzük a következő feladatot:

4. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: felírható, hogy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = I_2 + B$ továbbá $B^2 = \begin{bmatrix} 8 & -16 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = 2B$ ezért könnyen igazolható, hogy $B^k = 2^{k-1}B,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Tehát a Newton binomiális képlet alapján mivel $A^n = (I_2 + B)^n$, ezért

$$A^n = I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k B^k = I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^{k-1} B = I_2 + \frac{B}{2}\sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^k =$$

$$= I_2 + \frac{B}{2}\left((1+2)^n - 1\right) = I_2 + \frac{1}{2}(3^n - 1)B \ .$$

5. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ 3 & a+6 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ahol $a \in \mathbb{R}$.

Megoldás: felírhatjuk, hogy $A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = aI_2 + B$ ahol $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Könnyen észrevehető, hogy $B^2 = 7B$ ezért $B^k = 7^{k-1}B,\ \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ esetén. Ezért az $A^n = \left(aI_2 + B\right)^n$ összefüggés alapján, a Newton binomiális képlettel azt kapjuk, hogy

$$A^n = I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k B^k = I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k 7^{k-1} B = I_2 + \frac{B}{7}\sum_{k=1}^{n} C_n^k 7^k = I_2 + \frac{B}{7}\left((1+7)^n - 1\right) = I_2 + \frac{1}{7}(8^n - 1)B$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Ezzel a feladatot megoldottuk. Vegyük észre, hogy ezúttal a B mátrix választásának a kulcsa az volt, hogy $B^2 = 2B$ volt vagyis $B^2 = mB$ alakú legyen. Ebből kiindulva felmerül a következő kérdés:

4. kérdés: Melyek azok a B másodrendű valós elemű mátrixok, amelyekre $B^2 = mB$, ahol $m \in \mathbb{R}^*$?

Megoldás: ezúttal is a $B^2 - tB + \Delta I_2 = O_2$ Cayley-Hamilton karakterisztikus egyenletből indulunk ki. Ennek alapján azonnal látható, hogy a keresett feltétel éppen $\Delta = \det B = 0$. Ekkor

$B^2 = tB.$ Tehát ilyen B mátrix választással, az előző megoldott feladat mintájára járhatunk el.

6. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: felírható, hogy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = I_2 + 2B$ továbbá $B^2 = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3C$ valamint $C^2 = 2C$ tehát $C^k = 2^{k-1}C$, ezért $B^k = 3^k C = 2^{k-1} \cdot 3^k C$. Ezért, az $A^n = \left(I_2 + 2B\right)^n$ alapján, a Newton binomiális képlet alapján felírható, hogy:

$$A^n = I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k B^k = I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^{k-1} \cdot 3^k \cdot C = I_2 + \frac{C}{2}\sum_{k=1}^{n} C_n^k 6^k =$$

$= I_2 + \frac{C}{2}\left((1+6)^n - 1\right) = I_2 + \frac{1}{2}(7^n - 1)C$. Ezzel a feladatot megoldottuk. Vegyük észre, hogy ezúttal a B mátrix választásának a kulcsa az volt, hogy $B^2 = 3C$ volt, ahol $C^k = 2^{k-1}C$ vagyis $B^k = 3 \cdot 6^{k-1} C$ alakú legyen. Ebből kiindulva felmerül a következő kérdés:

5. kérdés: Melyek azok a B másodrendű valós elemű mátrixok, amelyekre $B^2 = mC$, ahol $m \in \mathbb{R}^*$ és $C^k = 2^{k-1}C,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$?

Megoldás: mivel $C^2 - tC + \Delta I_2 = O_2$ és $C^2 = mC$ kell legyen, ezért nyilvánvalóan $\Delta = \det C = 0$.

Tehát ilyen B illetve C mátrix választással, az előző megoldott feladat mintájára járhatunk el.

Végezetül nézzük a következő feladatot, amellyel az I. részben is találkoztunk:

7. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$ és $a,b \in \mathbb{R}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: felírható, hogy $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix} = aI_2 + B$ ahol $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Könnyen belátható, hogy $B^k = \begin{pmatrix} 0 & b^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$. Ezért az $A^n = \left(aI_2 + B\right)^n$ alapján, a Newton binomiális képlet segítségével felírható, hogy

$$A^n = a^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k B^k = a^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \begin{pmatrix} 0 & b^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \end{pmatrix}$$

ahonnan a Newton binomiális képlettel azt kapjuk, hogy: $A^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$.

A bemutatottak jobb elmélyítése végett, az érdeklődő Olvasónak javasoljuk a következő feladatok megoldását:

A következő A mátrixok esetén számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén:

(1) $A=\begin{bmatrix}-4 & -5\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -3 & 5\end{bmatrix}$ (3) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 5\end{bmatrix}$ (4) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (5) $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ (6) $A=\begin{bmatrix}a+2 & a\\ -a & -a+2\end{bmatrix}$ (7) $A=\begin{bmatrix}3-a & -a\\ a & 3+a\end{bmatrix}$ (8) $A=\begin{bmatrix}1+a & -a\\ a & 1-a\end{bmatrix}$ (9) $A=\begin{bmatrix}-a-2 & a\\ -a & a-2\end{bmatrix}$ (10) $A=\begin{bmatrix}a & -b\\ 0 & a-b\end{bmatrix}$

(11) $A=\begin{bmatrix}a+b & 0\\ b & a\end{bmatrix}$ (12) $A=\begin{bmatrix}b & a\\ 0 & b\end{bmatrix}$ (13) $A=\begin{bmatrix}b & 0\\ a & b\end{bmatrix}$ (14) $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$