Másodrendű mátrixok hatványozása karakterisztikus egyenlettel

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a paragrafusban a mátrixok hatványozásának egy újabb módszerével ismerkedünk meg. Ez a módszer a Cayley-Hamilton karakterisztikus egyenleten alapszik, amelyik a következő: Ha $A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ akkor $A^2-t\cdot A+d\cdot I_2=O_2$ ahol $t=TrA$ és $d=\det A$ (*). A képlet ellenőrzése azonnali, egyszerű számolásokkal rögtön adódik.

IV. A karakterisztikus egyenlet módszere

A következőkben, a mátrixok hatványozását a (*) alatti karakterisztikus egyenlettel kezdjük el, és ezt továbbfejlesztjük. Mivel az $A^2-t\cdot A+d\cdot I_2=O_2$ másodfokú mátrixegyenlet lehet hiányos másodfokú egyenlet is, előbb ezeket az eseteket tárgyaljuk le.

1. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: vegyük észre, hogy $d=0$ és $t=3$, ezért karakterisztikus egyenlet $A^2-3\cdot A=O_2 \Leftrightarrow A^2=3\cdot A$. Ezért $A^3=3\cdot A^2=3^2\cdot A$, $A^4=3\cdot A^3=3^3\cdot A$, így feltételezzük, hogy $A^k=3^{k-1}\cdot A$. Indukcióval bizonyítjuk, hogy $A^{k+1}=3^k\cdot A$. Valóban, $A^{k+1}=A^k\cdot A=3^{k-1}\cdot A\cdot A=3^{k-1}\cdot A^2=3^{k-1}\cdot 3A=3^k\cdot A$. Ezzel a feladatunkat megoldottuk.

2. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: vegyük észre, hogy $t=0$ és $d=-3$, ezért karakterisztikus egyenlet $A^2-3\cdot I_2=O_2 \Leftrightarrow A^2=3\cdot I_2$. Ezért $A^{2k}=\left(3\cdot I_2\right)^k=3^k\cdot I_2$ és továbbá $A^{2k+1}=A^{2k}\cdot A=3^k\cdot I_2\cdot A=3^k\cdot A$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

3. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: vegyük észre, hogy $t=0$ és $d=1$, ezért karakterisztikus egyenlet $A^2+I_2=O_2 \Leftrightarrow A^2=-I_2$. Ennek alapján rendre felírható, hogy $A^2=-I_2, A^3=-A, A^4=-A^2=I_2$ és $A^5=A$. A továbbiakban kulcsfontossággal bír az, hogy $A^4=I_2$.

Mivel bármely $n\in\mathbb{N}$ egyike a $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ alakoknak, ahol $k\in\mathbb{N}$, ezért rendre felírható, hogy $A^{4k}=\left(A^4\right)^k=\left(I_2\right)^4=I_2$, $A^{4k+1}=A^{4k}\cdot A=I_2\cdot A=A$, $A^{4k+2}=A^{4k}\cdot A^2=I_2\cdot A^2=A^2$ valamint $A^{4k+3}=A^{4k}\cdot A^3=I_2\cdot A^3=A^3$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Az előző példákban tehát olyan mátrixokat hatványoztunk, amikor vagy d=0, vagy t=0 volt, így a karakterisztikus egyenlet, hiányos egyenlet volt, és ezzel könnyen érvényesültünk.

A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor az $A^2-t\cdot A+d\cdot I_2=O_2$ karakterisztikus egyenlet, nem hiányos másodfokú egyenlet, vagyis $d\neq 0$ és $t\neq 0$.

Ezen célunk megvalósítása érdekében, szükségünk lesz, a másodfokú lineáris rekurzióegyenletek megoldására, ezért most kitérünk erre.

A másodrendű rekurziók közül különös fontossággal bírnak a lineáris homogén rekurziók. Ezek általános alakja: $ax_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=0$ (1) ahol $x_0=x, x_1=y$ adottak.

A homogén lineáris rekurzió megoldása szorosan kapcsolódik az úgynevezett karakterisztikus egyenlethez. Ez a következő meggondolásból adódik: az (1) egyenlet megoldását $x_n = q^n$ alakban keressük, ahol $q \neq 1$ így a rekurzió alapján eljutunk az $ar^2 + br + c = 0$ úgynevezett karakterisztikus egyenlethez.

(I) Ha ennek különböző gyökei vannak, akkor a függvény $x_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ ahol az α, β számokat a kezdeti $x_0 = x, x_1 = y$ feltételekből határozzuk meg.

(II) Ha a karakterisztikus egyenletnek dupla $r_1 = r_2 = r$ gyöke akkor $x_n = (\alpha r + \beta n) r^{n-1}$, és az α, β számokat ugyancsak a kezdeti $x_0 = x, x_1 = y$ feltételekből határozzuk meg.

(III) Ha a karakterisztikus egyenletnek komplex gyökei vannak, akkor $x_n = \alpha r^n + \overline{\alpha}\,\overline{r}^n$ és ahol $r = \rho(\cos t + i \sin t)$, így $x_n = \rho^n (\alpha \cos nt + \beta \sin nt)$ (v.ö. [1], 36. oldal).

Ezen információk birtokában, oldjuk meg a következő feladatokat. Először azonban nézzük a következőket:

A karakterisztikus egyenlet alapján $A^2 - t \cdot A + dI_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 = t \cdot A - d \cdot I_2$. Ennek alapján az is felírható, hogy $A^3 = t \cdot A^2 - d \cdot A$ és ha most az előbbi összefüggésből ide behelyettesítjük az $A^2 = t \cdot A - d \cdot I_2$ értéket, akkor egy $A^3 = x_3 \cdot A + y_3 \cdot I_2$ alakú összefüggést kapunk, ami azt sejteti, hogy $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$ alakú lesz. Ezt, a következő tételben fogalmazzuk meg:

Tétel: Ha $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $t = TrA$ és $d = \det A$, akkor léteznek olyan $(x_n)_{n \geq 0}$ és $(y_n)_{n \geq 0}$ számsorozatok, amelyekre $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$ (#) és $x_{n+1} - t \cdot x_n + d \cdot x_{n-1} = 0$,(1) $y_{n+1} - t \cdot y_n + d \cdot y_{n-1} = 0$,(2) bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, továbbá $x_0 = 0, y_0 = 1$ valamint $x_1 = 1, y_0 = 0$.

Bizonyítás: a (#) relációt indukcióval igazoljuk. Az $n = 0$ illetve $n = 1$ esetben az $I_2 = A^0 = x_0 \cdot A + y_0 \cdot I_2$ illetve $A^1 = x_1 \cdot A + y_1 \cdot I_2$ összefüggések, az $x_0 = 0, y_0 = 1$ valamint $x_1 = 1, y_0 = 0$.összefüggések alapján nyilvánvalóak. Feltételezzük tehát, hogy $A^k = x_k \cdot A + y_k \cdot I_2$. Igazoljuk, hogy $A^{k+1} = x_{k+1} \cdot A + y_{k+1} \cdot I_2$. Valóban,

$A^{k+1} = A \cdot A^k = A \cdot \left(x_k \cdot A + y_k \cdot I_2\right) = x_k \cdot A^2 + y_k A$. De $A^2 = t \cdot A - d \cdot I_2$, és ezt behelyettesítve azt kapjuk, hogy $A^{k+1} = x_k\left(t \cdot A - d \cdot I_2\right) + y_k \cdot A$ vagyis $A^{k+1} = (tx_k + y_k) \cdot A + \left(-dx_k\right) \cdot I_2$. Legyen most $x_{k+1} = t \cdot x_k + y_k$ és $y_{k+1} = -dx_k$ így éppen az (1) és (2) másodrendű rekurziós összefüggéseket kapjuk. Ezzel a Tételt bizonyítottuk.

4. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: mivel $t = 7, d = 10$ ezért a karakterisztikus egyenlet $A^2 - 7A + 10I_2 = O_2$, tehát $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$ ahol $x_{n+1} - 7 \cdot x_n + 10 \cdot x_{n-1} = 0$, és $y_{n+1} - 7 \cdot y_n + 10 \cdot y_{n-1} = 0$. továbbá $x_0 = 0, y_0 = 1$ valamint $x_1 = 1, y_0 = 0$. A két rekurziós egyenletnek ugyanaz a karakterisztikus egyenlete, $r^2 - 7r + 10 = 0$ amelynek a két különböző valós gyöke $r_1 = 2, r_2 = 5$. Tehát $x_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 5^n$ és $x_0 = 0, x_1 = 1$ így $x_n = \frac{1}{3}\left(5^n - 2^n\right)$. Továbbá $y_n = \gamma \cdot 2^n + \delta \cdot 5^n$ és $y_0 = 1, y_1 = 0$ ezért $y_n = -\frac{2}{3}\left(5^n - 2^n\right)$, $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2 = \frac{1}{3}\left(5^n - 2^n\right) \cdot A - \frac{2}{3}\left(5^n - 2^n\right) \cdot I_2$, ahonnan $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 2(5^n - 2^n) \\ 5^n - 2^n & 2 \cdot 5^n + 2^n \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

5. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: mivel $t = 4, d = 4$ ezért a karakterisztikus egyenlet $A^2 - 4A + 4I_2 = O_2$, tehát $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$ ahol $x_{n+1} - 4 \cdot x_n + 4 \cdot x_{n-1} = 0$, és $y_{n+1} - 4 \cdot y_n + 4 \cdot y_{n-1} = 0$. továbbá $x_0 = 0, y_0 = 1$

valamint $x_1 = 1, y_0 = 0$. A két rekurziós egyenletnek ugyanaz a karakterisztikus egyenlete, $r^2 - 4r + 4 = 0$ amelynek a két egybeeső valós

gyöke $r_1 = r_2 = 4$. Tehát $x_n = (2\alpha + \beta n) \cdot 2^{n-1}$ és $x_0 = 0, x_1 = 1$ így $x_n = n \cdot 2^{n-1}$.
Továbbá $y_n = (2\alpha + \beta n) \cdot 2^{n-1}$ és $y_0 = 1, y_1 = 0$ ezért $y_n = 2^n(1-n)$

Így hát $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2 = n \cdot 2^{n-1} \cdot A + 2^n(1-n) \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(2-n) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & 2^{n-1}(2+n) \end{pmatrix}$,
$\forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

6. feladat: Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: mivel $t = 2, d = 2$ ezért a karakterisztikus egyenlet $A^2 - 2A + 2I_2 = O_2$, tehát $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$ ahol $x_{n+1} - 2 \cdot x_n + 2 \cdot x_{n-1} = 0$, és $y_{n+1} - 2 \cdot y_n + 2 \cdot y_{n-1} = 0$. továbbá $x_0 = 0, y_0 = 1$

valamint $x_1 = 1, y_0 = 0$. A két rekurziós egyenletnek ugyanaz a karakterisztikus egyenlete, $r^2 - 2r + 2 = 0$ amelynek a két különböző komplex gyöke $r_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, illetve $r_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Tehát $x_n = \sqrt{2}^n\left(\alpha\cos\frac{n\pi}{4} + \beta\sin\frac{n\pi}{4}\right)$, $x_0 = 0, x_1 = 1$ ezért $x_n = \sqrt{2}^n \cdot \sin\frac{n\pi}{4}$. Továbbá $y_n = \sqrt{2}^n\left(\gamma\cos\frac{n\pi}{4} + \delta\sin\frac{n\pi}{4}\right)$, $y_0 = 1, y_1 = 0$, ezért $y_n = \sqrt{2}^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}\right)$. Tehát $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2 = \sqrt{2}^n \cdot \sin\frac{n\pi}{4} \cdot A + \sqrt{2}^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}\right) I_2$ Ebből azonnal adódik, hogy $A^n = \sqrt{2}^n \begin{bmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & \sin\frac{n\pi}{4} \\ -\sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4} \end{bmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

7. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

1. Megoldás: mivel $t=d=1$, ezért a karakterisztikus egyenlet $A^2-A+I_2=O_2$. Ha most mind a két oldalt megszorozzuk $A+I_2$-vel, akkor azt kapjuk, hogy $A^3+I_2=O_2 \Leftrightarrow A^3=-I_2 \Rightarrow A^6=I_2$. Tehát $A^{6k}=I_2, A^{6k+1}=A, A^{6k+2}=A^2, A^{6k+3}=A^3, A^{6k+4}=A^4, A^{6k+5}=A^5$.

2. Megoldás: mivel $t=d=1$ ezért a karakterisztikus egyenlet $A^2-A+I_2=O_2$, tehát $A^n=x_n\cdot A+y_n\cdot I_2$ ahol $x_{n+1}-x_n+x_{n-1}=0$, és $y_{n+1}-y_n+y_{n-1}=0$. továbbá $x_0=0, y_0=1$

valamint $x_1=1, y_0=0$. A két rekurziós egyenletnek ugyanaz a karakterisztikus egyenlete, $r^2-r+1=0$ amelynek a két különböző komplex gyöke $r_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ illetve $r_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$. Tehát $x_n=\alpha\cos\frac{n\pi}{6}+\beta\sin\frac{n\pi}{6}$, $x_0=0, x_1=1$ ezért $x_n=2\cdot\sin\frac{n\pi}{6}$. Továbbá $y_n=\alpha\cos\frac{n\pi}{6}+\beta\sin\frac{n\pi}{6}$, $y_0=1, y_1=0$, ezért $y_n=\cos\frac{n\pi}{6}-\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{6}$. Tehát $A^n=x_n\cdot A+y_n\cdot I_2=2\cdot\sin\frac{n\pi}{6}\cdot A+\left(\cos\frac{n\pi}{6}-\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{6}\right)I_2$.

Vegyük észre, hogy a két megoldás összhangban van egymással, ugyanis a $\cos\frac{n\pi}{6}, \sin\frac{n\pi}{6}$ éppen 6 periodikusak.

8. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix} 2b-a & a-b \\ 2b-2a & 2a-b \end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: számolásokkal ellenőrizhető, hogy $t=a+b, d=ab$ ezért a karakterisztikus egyenlet $A^2-(a+b)A+abI_2=O_2$. Tehát $A^n=x_n\cdot A+y_n\cdot I_2$ ahol $x_{n+1}-(a+b)\cdot x_n+ab\cdot x_{n-1}=0$, és $y_{n+1}-(a+b)\cdot y_n+ab\cdot y_{n-1}=0$. továbbá $x_0=0, y_0=1$ valamint $x_1=1, y_0=0$. A két rekurziós egyenletnek ugyanaz a karakterisztikus egyenlete, $r^2-(a+b)r+ab=0$ amelynek a két különböző komplex gyökei $x_n=\alpha\cdot a^n+\beta\cdot b^n$ és $x_0=0, x_1=1$ így $x_n=\frac{1}{a-b}\left(a^n-b^n\right)$. Továbbá $y_n=\gamma\cdot a^n+\delta\cdot b^n$ és $y_0=1, y_1=0$ ezért $y_n=\frac{1}{a-b}\left(-ba^n+ab^n\right)$, $A^n=x_n\cdot A+y_n\cdot I_2=\frac{1}{a-b}\left(a^n-b^n\right)\cdot A+\frac{1}{a-b}\left(-ba^n+ab^n\right)\cdot I_2$, így $A^n=\begin{pmatrix}2b^n-a^n & a^n-b^n\\ 2b^n-2a^n & 2a^n-b^n\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ esetén.

9. feladat: Ha $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, akkor számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Megoldás: ezzel a feladattal az I. részben foglalkoztunk, ahol indukcióval igazoltuk, hogy

$A^n=\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}$, és $F_1=F_2=1$ és $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ az úgynevezett Fibonacci sorozat.

Most megkeressük az F_n képletét, vagyis zárt alakját. A rekurzió karakterisztikus egyenlete $r^2-r-1=0$ amelynek a gyökei $r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ezért $F_n=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ahol $F_1=F_2=1$, így azt kapjuk, hogy $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Ezek szerint felírható, hogy

$$A^n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \begin{bmatrix} (1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1} & 2(1+\sqrt{5})^n - 2(1-\sqrt{5})^n \\ 2(1+\sqrt{5})^n - 2(1-\sqrt{5})^n & 4(1+\sqrt{5})^{n-1} - 4(1-\sqrt{5})^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

esetén. Ugye mennyire meglepő eredmény, hogy az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ hatványozása során ilyen bonyolult eredményt kapjunk?

A bemutatottak jobb elmélyítése végett, az érdeklődő Olvasónak javasoljuk a következő feladatok megoldását:

A következő A mátrixok esetén számítsuk ki az A^n hatványt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén:

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (6) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(7) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (8) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (9) $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (10) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (11) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (12) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(13) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ (14) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (15) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (16) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(17) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$