Lineáris rekurziók megoldása mátrixokkal

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a paragrafusban az $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$ (a, b, c, d, x_0, y_0 adottak) lineáris rekurencia egyenletrendszer megoldásával foglalkozunk, mátrixok hatványozásának a segítségével. Ennek a kivitelezéséhez, nézzük csak át az előző, IV. részben leírtakból a következőket:

Ott bizonyítottuk, hogy bármely másodrendű X mátrix esetén $X^n = x_n X + y_n I_2$ (1) alakra írható, ahol az $r^2 - tr + d = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökeinek természete szerint felírtuk, hogy:

1) Ha $\Delta > 0$ akkor $x_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ és $y_n = \delta r_1^n + \gamma r_2^n$ (2)

2) Ha $\Delta = 0$ akkor $x_n = (\alpha + \beta n) r^n$ és $y_n = (\delta + \gamma r) r^n$ (3)

3) Ha $\Delta < 0$ akkor $x_n = \rho^n (\alpha \cos nt + \beta \sin nt)$ és $y_n = \rho^n (\delta \cos nt + \gamma \sin nt)$, ahol $\rho = |r|$ (4)

Ezek segítségével, a mátrixok hatványozása csupán mátrixegyenletekkel is felírható, a következő módon:

Felírjuk a mátrix $X^2 - tX + dI_2 = O_2$ karakterisztikus egyenletét, amelynek a numerikus formája $r^2 - tr + d = 0$. Most, ha az (1)-be rendbe behelyettesítjük a (2), (3), (4) összefüggéseket azt kapjuk, hogy:

1) Ha $\Delta > 0$ akkor $X^n = r_1^n \cdot B + r_2^n \cdot C$ (2')

2) Ha $\Delta = 0$ akkor $X^n = (B + nC) r^n$ (3')

3) Ha $\Delta < 0$ akkor $x_n = \rho^n (B \cdot \cos nt + C \cdot \sin nt)$, ahol $\rho = |r|$ (4')

Tehát ezen képletek segítségével, azonnal meghatározható az X^n mátrixhatvány, ahol a B, C mátrixokat a kezdetértéki feltételekből határozzuk meg.

Most rátérünk a dolgozatunk központi mondanivalójára, az $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$ (5) rekurencia egyenlet rendszer megoldására.

Az (5) rekurencia egyenletrendszer mátrixokkal így is írható: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ vagyis $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ (6), ahol $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$ és x_0, y_0 adottak.

A (6) ismételt alkalmazásával rendre felírható, hogy $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, tehát $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (*). Így hát az (5) rekurencia egyenlet megoldása végett, csupán az $A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n$ hatványozást kell elvégeznünk.

Nézzünk is néhány azonnali alkalmazást:

1. feladat: Oldjuk meg az $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$ rekurencia egyenlet rendszert, ahol $x_0 = y_0 = 1$.

Megoldás: A (*) összefüggés alapján $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Most pedig ki kell számítanunk az A^n hatványt. Ebből a célból felírjuk a mátrix karakterisztikus egyenletét, ami $A^2 - 2A - I_2 = O_2$ ami numerikusan $r^2 - 2r - 1 = 0$ és ennek a gyökei $r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Ezért a (2') képlet alapján $A^n = (1+\sqrt{2})^n B + (1-\sqrt{2})^n C$. Most a kezdetértéki feltételek alapján, ha rendre n=0 illetve n=1, akkor felírható, hogy $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^0 = B + C$ illetve $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A^1 = (1+\sqrt{2})B + (1-\sqrt{2})C$. Ha most megoldjuk ez utóbbi egyenletrendszert azt kapjuk, hogy $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ és

$$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad A^n=(1+\sqrt{2})^n\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}+(1-\sqrt{2})^n\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

ahonnan az $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ alapján azt kapjuk, hogy

$x_n=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\right]$ és $y_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right]$.

2. feladat: Oldjuk meg az $\begin{cases}x_{n+1}=x_n+2y_n\\ y_{n+1}=-2x_n+5y_n\end{cases}$ rekurencia egyenlet rendszert, ahol $x_0=1, y_0=2$.

Megoldás: A (*) összefüggés alapján $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ ahol $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$.

Most pedig ki kell számítanunk az A^n hatványt. Ebből a célból felírjuk a mátrix karakterisztikus egyenletét, ami $A^2-6A+9I_2=O_2$ ami numerikusan $r^2-6r+9=0$ és ennek a gyökei $r_{1,2}=3$. Ezért a (3’) képlet alapján $A^n=3^n\cdot B+n\cdot 3^{n-1}C$. Most a kezdetértéki feltételek alapján, ha rendre n=1 illetve n=2, akkor felírható, hogy $A=3B+C$ illetve $A^2=3^2B+6C$. Ha most megoldjuk ez utóbbi egyenletrendszert azt kapjuk, hogy $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ és $C=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$.

Így tehát $A^n=\begin{bmatrix}3^n & 0\\ 0 & 3^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2n3^{n-1} & 2n3^{n-1}\\ -2n3^{n-1} & 2n3^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^{n-1}(3-2n) & 2n3^{n-1}\\ -2n3^{n-1} & 3^{n-1}(3+2n)\end{bmatrix}$

ahonnan az $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{n-1}(2-3n) & 2n3^{n-1}\\ -2n3^{n-1} & 3^{n-1}(2+3n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ alapján azt kapjuk, hogy

$x_n=3^{n-1}(3+2n)$ és $y_n=2\cdot 3^{n-1}(3+n)$.

3. feladat: Igazoljuk, hogy a $\begin{cases} 2x_n = \sqrt{3}x_{n-1} + y_{n-1} \\ 2y_{n+1} = -x_n + \sqrt{3}y_n \end{cases}$ rekurziók által értelmezett x_n, y_n sorozatoknak ugyanaz a periódusa! Számítsuk is ki ezt!

Megoldás: A rekurencia egyenletrendszer így is írható: $\begin{cases} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} \\ y_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + \frac{\sqrt{3}}{2}y_n \end{cases}$, vagyis $\begin{cases} x_n = \cos\frac{\pi}{6}\cdot x_{n-1} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot y_{n-1} \\ y_{n+1} = -\sin\frac{\pi}{6}\cdot x_n + \cos\frac{\pi}{6}\cdot y_n \end{cases}$. Így hát $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, ahol $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$, és az előző részekben láttuk, hogy $A^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & \sin\frac{n\pi}{6} \\ -\sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$, ezért azt kapjuk, hogy $x_n = \cos\frac{n\pi}{6}\cdot x_0 + \sin\frac{n\pi}{6}\cdot y_0$ és $x_n = -\sin\frac{n\pi}{6}\cdot x_0 + \cos\frac{n\pi}{6}\cdot y_0$, ahonnan látható, hogy $x_{n+12} = x_n, y_{n+12} = y_n$, tehát a főperiódus $T = 12$.

A rekurencia egyenlet rendszerek szoros összefüggésben vannak az ú.n. Pell egyenlettel, vagyis az $x^2 - ky^2 = 1$ egyenlet egész számú megoldásával, ahol k négyzetszámmentes természetes szám.

Észrevehető, hogy ha (x_0, y_0) az adott Pell egyenlet legkisebb pozitív egész megoldása, akkor $x_0^2 - ky_0^2 = 1$, vagyis $(x_0 + y_0\sqrt{k})(x_0 - y_0\sqrt{k}) = 1$ akkor ha ezt n-edik hatványra emeljük, és használjuk a Newton binomiális képletet, miszerint $(x_0 + y_0\sqrt{k})^n = x_n + y_n\sqrt{k}$ (6) és $(x_0 - y_0\sqrt{k})^n = x_n - y_n\sqrt{k}$ (7), akkor nyílvánvalóan $x_n^2 - ky_n^2 = 1$, vagyis (x_n, y_n) megoldása a Pell egyenletnek. De

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{k} = (x_0 + y_0\sqrt{k})^{n+1} = (x_0 + y_0\sqrt{k})^n(x_0 + y_0\sqrt{k}) = \left(x_n + y_n\sqrt{k}\right)(x_0 + y_0\sqrt{k})$$

, ahonnan azt kapjuk, hogy $\begin{cases} x_{n+1} = x_0 x_n + k y_0 y_n \\ y_{n+1} = y_0 x_n + x_0 y_n \end{cases}$ (8). És ezek után, már visszakaptuk a tárgyalt rekurencia egyenletrendszert, így a Pell egyenletre mátrixokkal végzett megoldást is adhatunk: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & k y_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$

vagyis $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & k y_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Felírjuk most a mátrix karakterisztikus egyenletét, ahonnan $r^2 - 2x_0 r + 1 = 0$, így a megoldások

$x_n = \frac{1}{2}\left[(x_0 + y_0\sqrt{k})^{n+1} + (x_0 - y_0\sqrt{k})^{n+1} \right]$ és

$y_n = \frac{1}{2\sqrt{k}}\left[(x_0 + y_0\sqrt{k})^{n+1} - (x_0 - y_0\sqrt{k})^{n+1} \right]$. Megjegyezzük, hogy az előbbiekben nem bizonyítottunk semmit sem a legkisebb pozitív megoldás létezéséről, sem arról, hogy a Pell egyenlet összes egész megoldását valóban a (8) adja meg. Ennek a bizonyítása nem is olyan egyszerű.

Megjegyzés: A Pell egyenlet megoldásainak $\frac{x_n}{y_n}$ arányai tulajdonképpen a $\sqrt{k}$ megközelítő értékei, sőt mi több, felírható, hogy $\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{k} = \frac{1}{y_n(x_n + y_n\sqrt{k})} < \frac{1}{y_n^2\sqrt{k}} < \frac{1}{y_n^2} \to 0$ vagy másként:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \sqrt{k} \lim_{n\to\infty} \frac{(x_0 + y_0\sqrt{k})^{n+1} + (x_0 - y_0\sqrt{k})^{n+1}}{(x_0 + y_0\sqrt{k})^{n+1} - (x_0 - y_0\sqrt{k})^{n+1}} = \sqrt{k} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{x_0 - y_0\sqrt{k}}{x_0 + y_0\sqrt{k}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{x_0 - y_0\sqrt{k}}{x_0 + y_0\sqrt{k}} \right)^{n+1}} = \sqrt{k}$$

4. feladat: Oldjuk meg a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazon az $x^2 - 2y^2 = 1$ alakú Pell egyenletet.

Megoldás: Vegyük észre, hogy $(x_0, y_0) = (3, 2)$ a legkisebb pozitív megoldása az egyenletnek, ezért az előbbiek értelmében

$$x_n = \frac{1}{2}\left[(3+2\sqrt{k})^{n+1} + (3-2\sqrt{k})^{n+1}\right] \text{ és } y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(3+2\sqrt{k})^{n+1} - (3-2\sqrt{k})^{n+1}\right]$$

. Ennek a részletes levezetését az érdeklődő Olvasó az előbbiek mintájára könnyen megteheti.

5. feladat: Keressük meg az összes n pozitív egész számot, amelyekre egyidőben $n+1$ is és $3n+1$ is négyzetszámok!

Megoldás: A feltételek alapján felírható, hogy $n+1=x^2$ és $3n+1=y^2$ ahonnan $3x^2-y^2=2$ ami nem éppen a szokványos Pell egyenlet, ezért elvégezzük az $u=\frac{1}{2}(3x-y)$ és $v=\frac{1}{2}(y-x)$ transzformációt, aminek nyomán azt kapjuk, hogy $u^2-3y^2=1$ és az előbbiek alapján ennek a Pell egyenletnek az általános megoldása $u_k = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{k+1} + (2-\sqrt{3})^{k+1}\right]$ és $v_k = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^{k+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}\right]$. Így hát a feladat megoldásai $n_k = x_k^2 - 1 = (u_k+v_k)^2 - 1 = \frac{1}{6}\left[(2+\sqrt{3})^{2k+1} + (2-\sqrt{3})^{2k+1} - 4\right], \forall k \geq 1$.

Végezetül rátérünk egy nagyon érdekes sorozattípusra, a homografikus sorozat megoldására.

Egy $z_{n+1} = f(z_n)$ rekurzió alapján értelmezett sorozatot, ahol $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, homográfikus sorozatnak nevezzük. Érdekes módon, az általános tagjának a meghatározása visszavezethető a már tárgyalt lineáris rekurziós egyenletrendszerre. Tehát $z_{n+1} = \frac{az_n+b}{cz_n+d}$. A z_n általános tagot $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ alakban keressük, és mivel $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{ax_n+by_n}{cx_n+dy_n}$, ezért azzal a feltétellel keressük, hogy $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$ legyen. Tehát visszavezettük a megoldást, már ismert rekurencia remdszer megoldására. Nézzünk csak egy példát is!

6. feladat: Keressük meg a $z_{n+1} = \dfrac{2z_n + 1}{2z_n + 3}$ és $z_0 = 1$ rekurzióval értelmezett sorozat általános tagjának a képletét!

Megoldás: Az előbbiekben bemutatottak alapján $z_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ alakban keressük, így $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$

Tehát $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, ahol $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ és $\dfrac{x_0}{y_0} = 1$. Most ki kell számoljuk az $A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n$ mátrixhatványt. A karakterisztikus egyenlet tehát $r^2 - 5r + 4 = 0$ amelynek a gyökei $r_1 = 1, r_2 = 4$. Tehát $A^n = B + 4^n C$. A kezdetértéki feltételek mellett $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^0 = B + C$, és $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A^1 = B + 4C$. Innen azt kapjuk, hogy $B = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ és $C = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Tehát $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 4^n \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4^n + 2}{3} & \dfrac{4^n - 1}{3} \\ \dfrac{2 \cdot 4^n - 2}{3} & \dfrac{2 \cdot 4^n + 1}{3} \end{bmatrix}$.

Ezért $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4^n + 2}{3} & \dfrac{4^n - 1}{3} \\ \dfrac{2 \cdot 4^n - 2}{3} & \dfrac{2 \cdot 4^n + 1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ahonnan $x_n = x_0 \dfrac{4^n + 2}{3} + y_0 \dfrac{4^n - 1}{3}$ és $y_n = x_0 \dfrac{2 \cdot 4^n - 2}{3} + y_0 \dfrac{2 \cdot 4^n + 1}{3}$. Tehát felírhatjuk, hogy

$$z_n = \frac{x_0 \dfrac{4^n + 2}{3} + y_0 \dfrac{4^n - 1}{3}}{x_0 \dfrac{2 \cdot 4^n - 2}{3} + y_0 \dfrac{2 \cdot 4^n + 1}{3}} = \frac{\dfrac{x_0}{y_0} \dfrac{4^n + 2}{3} + \dfrac{4^n - 1}{3}}{\dfrac{x_0}{y_0} \dfrac{2 \cdot 4^n - 2}{3} + \dfrac{2 \cdot 4^n + 1}{3}} = \frac{\dfrac{4^n + 2}{3} + \dfrac{4^n - 1}{3}}{\dfrac{2 \cdot 4^n - 2}{3} + \dfrac{2 \cdot 4^n + 1}{3}} = \frac{2^{2n+1} + 1}{2^{2n+2} - 1}$$

Ezzel meghatároztuk a az adott sorozat általános tagjának a képletét.