Függvényösszetétel mátrix hatványozással

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a paragrafusban, a másodrendű mátrix hatványozásának egy különös és érdekes alkalmazásáról írunk.

Tekintsük az $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{a}\right\}\to\mathbb{R}$ elsőfokú racionális függvényt (homografikus függvény). Értelmezzük a következő sorozatot: $f_1=f$, $f_2=f\circ f$, $f_3=f\circ f\circ f$,…, $f_n=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-szer}$. Rekurzióval értelmezve tehát $f_n=f\circ f_{n-1}=f_{n-1}\circ f$ (1).

Célul tűzzük ki az $f_n(x)$ kiszámolását, az előbbi törtfüggvény esetén.

A feladat megoldása érdekében induljunk ki a következőből:

$$f_2(x)=\left(f\circ f\right)(x)=\frac{af(x)+b}{cf(x)+d}=\frac{a\dfrac{ax+b}{cx+d}+b}{c\dfrac{ax+b}{cx+d}+d}=\frac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+d^2+bc}\quad(2)$$

Ennek alapján rendre jelöljük $f_1(x)=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$, $f_2(x)=\dfrac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$ és általában $f_n(x)=\dfrac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}$. Ezért, ha $f_{n+1}(x)=\dfrac{a_{n+1}x+b_{n+1}}{c_{n+1}x+d_{n+1}}$ (3) akkor mivel

$$f_{n+1}(x)=\left(f_n\circ f\right)(x)=f_n\left(f(x)\right)=\frac{a_nf(x)+b_n}{c_nf(x)+d_n}=\frac{a_n\dfrac{ax+b}{cx+d}+b_n}{c_n\dfrac{ax+b}{cx+d}+d_n}=\frac{(aa_n+cb_n)x+(ba_n+db_n)}{(ac_n+cd_n)x+(bc_n+dd_n)}$$

(4), ezért a (3) és (4) azonosításából a következő rekurziókkal értelmezett a_n,b_n,c_n,d_n sorozatokat kapjuk:

$a_{n+1} = aa_n + cb_n$, $b_{n+1} = ba_n + db_n$, $c_{n+1} = ac_n + cd_n$, $d_{n+1} = bc_n + dd_n$ ahol $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c, d_1 = d$.

A (2)-es összefüggésben figyeljünk fel csak a következő kifejezésekre: $a^2 + bc$, $b(a+d)$ $c(a+d)$, $d^2 + bc$. Könnyen észrevehetjük, hogy ha az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixot tekintjük, akkor $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$, vagyis a szóban forgó négy kifejezés, éppen az A^2 mátrixhatvány elemei. Ez utóbbi, a már bevezetett jelöléssel így írható: $A^2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ ahol

$a_2 = aa_1 + cb_1$, $b_2 = ba_1 + db_2$, $c_2 = ac_1 + cd_1$, $d_2 = bc_1 + dd_1$ és $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c, d_1 = d$.

Ha most indukcióval feltételezzük, hogy $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, akkor mivel

$A^{n+1} = A \cdot A^n$ vagyis

$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ tehát $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_n + cb_n & ba_n + db_n \\ ac_n + cd_n & bc_n + dd_n \end{pmatrix}$

ahonnan a már ismert $a_{n+1} = aa_n + cb_n$, $b_{n+1} = ba_n + db_n$, $c_{n+1} = ac_n + cd_n$, $d_{n+1} = bc_n + dd_n$ ahol $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c, d_1 = d$ rekurziót kapjuk. Tehát az indukciós feltevésünk helyes.

Ezek alapján kijelenthető a jelen dolgozatunk központi eredménye:

Tétel: Ha $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{a} \right\} \to \mathbb{R}$ és $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, valamint $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, $f_3 = f \circ f \circ f$,..., $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-szer}$, tehát $f_n = f \circ f_{n-1} = f_{n-1} \circ f$, akkor $f_n(x) = \dfrac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$ ahol az a_n, b_n, c_n, d_n sorozat tagjait az $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ mátrixhatványból határozzuk meg.

A tétel bizonyítása tulajdonképpen kiolvasható az előbbi eszmefuttatásokból.

Nézzünk most a Tételnek néhány alkalmazását:

1. Alkalmazás: Ha $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x+6}$, $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, akkor számítsuk ki az $f_n(x)$ függvényt, ahol $f_n=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-szer}$ minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Megoldás: A függvényhez tartozó mátrix $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$, és nem marad hátra mint az, hogy kiszámítsuk az A^n hatványt. Ezt a karakterisztikus egyenlet módszerével tesszük meg (lásd a IV. részt). Mivel $t=8, d=0$ ezért a karakterisztikus egyenlet $A^2-8A=O_2$ vagyis $A^2=8A$ és innen már azonnal kapjuk, hogy $A^n=8^{n-1}A=\begin{pmatrix}2\cdot 8^{n-1} & 3\cdot 8^{n-1}\\ 4\cdot 8^{n-1} & 6\cdot 8^{n-1}\end{pmatrix}$. Tehát $f_n(x)=\dfrac{2\cdot 8^{n-1}x+3\cdot 8^{n-1}}{4\cdot 8^{n-1}x+6\cdot 8^{n-1}}=\dfrac{2x+3}{4x+6}=f(x),\ \forall \mathrm{n}\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ebben az esetben $d=0$ volt, ezért hasonló esetekben, a karakterisztikus egyenlet $A^2=t\cdot A$ alakú lesz, ezért $A^n=t^{n-1}A=\begin{pmatrix}2\cdot t^{n-1} & 3\cdot t^{n-1}\\ 4\cdot t^{n-1} & 6\cdot t^{n-1}\end{pmatrix}$, így hát mindig $f_n(x)=f(x),\ \forall \mathrm{n}\in\mathbb{N}^*$ esetén.

2. Alkalmazás: Ha $f(x)=\dfrac{x+2}{2x-1}$, $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, akkor számítsuk ki az $f_n(x)$ függvényt, ahol $f_n=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-szer}$ minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Megoldás: A függvényhez tartozó mátrix $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, és nem marad hátra mint az, hogy kiszámítsuk az A^n hatványt. Ezt a karakterisztikus egyenlet módszerével tesszük meg (lásd a IV. részt). Mivel $t=0, d=-5$ ezért a karakterisztikus egyenlet $A^2-5I_2=O_2$ vagyis $A^2=5I_2$ és $A^3=5A$ innen már azonnal kapjuk, hogy $A^{2k}=5^{2k-1}I_2=\begin{pmatrix} 5^{2k-1} & 0 \\ 0 & 5^{2k-1} \end{pmatrix}$ illetve $A^{2k+1}=5^{2k}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5^{2k} & 2\cdot 5^{2k} \\ 2\cdot 5^{2k} & -5^{2k} \end{pmatrix}$. Tehát $f_{2k}(x)=\dfrac{5^{2k-1}x+0}{0\cdot x+5^{2k-1}}=\dfrac{5x}{5}=x,$ illetve $f_{2k+1}(x)=\dfrac{5^{2k-1}x+2\cdot 5^{2k-1}}{2\cdot 5^{n-1}x-5^{n-1}}=\dfrac{x+2}{2x-6}=f(x)\ \forall k\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ebben az esetben $t=0$ volt, ezért hasonló esetekben, a karakterisztikus egyenlet $A^2=-d\cdot I_2 \Rightarrow A^3=-d\cdot A$ alakú lesz, ezért $A^{2k}=-d^{2k-1}I_2=\begin{pmatrix} -d^{2k-1} & 0 \\ 0 & -d^{2k-1} \end{pmatrix}$ és $A^{2k+1}=d^{2k}\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m\cdot d^{2k} & n\cdot d^{2k} \\ p\cdot d^{2k} & q\cdot d^{2k} \end{pmatrix}$ így hát általában is $f_{2k}(x)=x,$ és $f_{2k+1}(x)=\dfrac{mx+n}{px+q}=f(x)\ \forall k\in\mathbb{N}^*$ esetén.

3. Alkalmazás: Ha $f(x)=\dfrac{3x+1}{-x+1}$, $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, akkor számítsuk ki az $f_n(x)$ függvényt, ahol $f_n=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n-szer}$ minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Megoldás: Ha megpróbálnánk kiszámítani néhány függvényösszetételt, ezt kapnánk: $f(f(x))=\dfrac{8x+4}{-4x}$, $f(f(f(x)))=\dfrac{20x+12}{-12-4}$, de ezekből nem jövünk rá egy könnyen, hogy a feladatot esetleg indukcióval bizonyítsuk. Éppen ezért felírjuk, hogy a függvényhez tartozó mátrix $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, és nem marad hátra mint az, hogy kiszámítsuk az A^n hatványt. Ezt a karakterisztikus egyenlet módszerével tesszük meg (lásd a IV. részt). Mivel $t=4, d=4$ ezért a karakterisztikus egyenlet $A^2-4A+4I_2=O_2$, tehát $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$ ahol $x_{n+1} - 4 \cdot x_n + 4 \cdot x_{n-1} = 0$, és $y_{n+1} - 4 \cdot y_n + 4 \cdot y_{n-1} = 0$. továbbá $x_0 = 0, y_0 = 1$ valamint $x_1 = 1, y_0 = 0$. A két rekurziós egyenletnek ugyanaz a karakterisztikus egyenlete, $r^2 - 4r + 4 = 0$ amelynek a két egybeeső valós gyöke $r_1 = r_2 = 4$. Tehát $x_n = \left(2\alpha + \beta n\right) \cdot 2^{n-1}$ és $x_0 = 0, x_1 = 1$, valamint $y_n = \left(2\gamma + \delta n\right) \cdot 2^{n-1}$ és $y_0 = 1, y_1 = 0$. A kezdetértéki feltételek mellett, számolásokkal azonnal adódik, hogy $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) & n \cdot 2^{n-1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & -2^{n-1}(n-2) \end{pmatrix}$. Ennek alapján tehát felírható a kérdéses függvényösszetétel eredménye: $f_n(x) = 2^{n-1} \dfrac{(n+2)x + n}{-nx - (n-2)}$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

4. Alkalmazás: Ha $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x+3}$, $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, akkor számítsuk ki az $f_n(x)$ függvényt, ahol $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-szer}$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Megoldás: Felírjuk a függvényhez tartozó mátrixot, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, és nem marad hátra mint az, hogy kiszámítsuk az A^n hatványt. Ezt a karakterisztikus egyenlet módszerével tesszük meg (lásd a IV. részt). Mivel $t = 7, d = 10$ ezért a karakterisztikus egyenlet $A^2 - 7A + 10I_2 = O_2$, tehát $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$ ahol $x_{n+1} - 7 \cdot x_n + 10 \cdot x_{n-1} = 0$, és $y_{n+1} - 7 \cdot y_n + 10 \cdot y_{n-1} = 0$. továbbá $x_0 = 0, y_0 = 1$ valamint $x_1 = 1, y_0 = 0$. A két rekurziós egyenletnek ugyanaz a karakterisztikus egyenlete, $r^2 - 7r + 10 = 0$ amelynek a két különböző valós gyöke van, $r_1 = 2, r_2 = 5$. Tehát $x_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 5^n$ és $x_0 = 0, x_1 = 1$, valamint $y_n = \delta \cdot 2^n + \gamma \cdot 5^n$ és $y_0 = 1, y_1 = 0$. A kezdetértéki feltételek mellett, számolásokkal azonnal adódik, hogy $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2 \cdot 5^n & -2^n + 5^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n & 2^{n+1} + 5^n \end{pmatrix}$. Ennek alapján tehát felírható a kérdéses függvényösszetétel eredménye: $f_n(x)=\dfrac{(2^n+2\cdot 5^n)x-2^n+5^n}{\left(-2^{n+1}+2\cdot 5^n\right)x+2^{n+1}+5^n}$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Végezetül rátérünk egy nagyon érdekes sorozattípusra, a homografikus sorozat megoldására.

Nézzük csak: ha $\begin{cases} x_{n+1}=ax_n+by_n \\ y_{n+1}=cx_n+dy_n \end{cases}$, akkor $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=\dfrac{ax_n+by_n}{cx_n+dy_n}$ és ha bevezetjük a $z_n=\dfrac{x_n}{y_n}$ jelölést, akkor azt kapjuk, hogy $z_{n+1}=\dfrac{az_n+b}{cz_n+d}$ vagyis egy $z_{n+1}=f(z_n)$ típusú rekurziót kaptunk,

ahol $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ úgynevezett homografikus függvény. A továbbiakban megmutatjuk, hogy egy ilyen sorozat általános tagja is kiszámítható mátrixok hatványozásával.

5. Alkalmazás: Ha $x_{n+1}=\dfrac{2x_n+1}{2x_n+3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ és $x_0=a\in\mathbb{R}$, határozzuk meg a sorozat általános tagját!

Megoldás: A Tétel értelmében $x_n=\dfrac{a_nx_0+b_n}{c_nx_0+d_n}$, ahol a_n,b_n,c_n,d_n az $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n$ hatványozásból származnak. A mátrix karakterisztikus egyenlete $A^2-5A+4I_2=O_2$ és numerikusan $r^2-5r+4=0$ ahonnan $r_1=1, r_2=4$ ezért $A^n=B+4^nC$ és a kezdetértéki feltételekből $B+4C=A, B+16C=A^2$, így hát $B=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ezért hát $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n \\ -2+2\cdot 4^n & 1+2\cdot 4^n \end{pmatrix}$, és ezért $x_n=\dfrac{(2+4^n)x_0+(4^n-1)}{2(4^n-1)x_0+\left(2\cdot 4^n+1\right)}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén.