Magasabb fokú mátrixegyenletek megoldása

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Az előző paragrafusokban azzal foglalkoztunk, hogy adott $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixok esetén, határozzuk meg az A^n hatványmátrixok, minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén. Ebben a paragrafusban éppen ennek a fordított műveletével foglalkozunk, vagyis adott $k\in\mathbb{N}^*$ esetén ismert az $X^k=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ és ebből kell meghatároznunk az X mátrixot. Ez jóval nehezebb mint az előző művelet, mert a mátrixok halmazán nem értelmezett a gyökvonás művelet, de még az inverz mátrixal való szorzás sem vezet eredményre.

Az ilyen típusu feladatok tulajdonképpen magasabb fokú mátrixegyenletek (pontosabban binom egyenletek), és a továbbiakban ezek megoldására két módszert mutatunk be megjegyezve, hogy esetenként akár mind a két módszer alkalmazható. A két módszer a következő:

1) **A** *Tr(X)* **és** *det(X)* **módszere** 2) **Az** $AX=XA$ **kommutálási módszere**

A következőkben megoldott feladatok által kitérünk a két módszer részletes tárgyalására.

I.A *Tr(X)* és *det(X)* módszere

Emlékeztetünk, hogy adott $X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ mátrix esetén $t=Tr(X)=x+y$ és ezt a mátrix nyomának is nevezzük, továbbá $d=\det(X)=xt-yz$ és ezt a mátrix determinánsának nevezzük.

A két operátor lényegesebb tulajdonságai a következők:

(1) $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$ és (2) $Tr(kA)=kTr(A)$

(3) $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$ és (4) $\det(A^n)=\left(\det(A)\right)^n$

Ezen fogalmak segítségével különös fontossággal bír a mátrix karakterisztikus egyenletek, a Cayley-Hamilton formula: $X^2-t\cdot X+d\cdot I_2=O_2$.

1. **feladat**: Határozzuk meg az összes olyan $X\in M_2(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $X^2=\begin{pmatrix}1 & 12\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

Megoldás: Az előzőekben említett (4)-es tulajdonság szerint felírható, hogy $\det X^2=\left(\det X\right)^2=1+48=49$ tehát $d=\det X=\pm 7$. Ezért, ha $t=TrX$, akkor a karakterisztikus egyenlet alapján felírható, hogy

$$X^2-t\cdot X+7I_2=O_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 12\\ -4 & 1\end{pmatrix}-t\cdot X\pm\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow tX=\begin{pmatrix}1 & 12\\ -4 & 1\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$$

.

a) Ha $tX=\begin{pmatrix}1 & 12\\ -4 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 12\\ -4 & 8\end{pmatrix}$ és ha vesszük mind a két oldal nyomát, akkor (2)-es tulajdonság alapján kapjuk, hogy $t^2=16\Rightarrow t=\pm 4$ ezért az előző összefüggés alapján $X=\pm\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

b) Ha ellenben $tX=\begin{pmatrix}1 & 12\\ -4 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 12\\ -4 & -6\end{pmatrix}$ és ha vesszük mind a két oldal nyomát, akkor (2)-es tulajdonság alapján kapjuk, hogy $t^2=-12\Rightarrow t\notin\mathbb{R}$ ezért ebben az esetben nem kapunk valós megoldásokat.

2. **feladat:** Határozzuk meg az összes olyan $X\in M_2(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $X^2+X=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

Megoldás: vegyük észre, hogy az egyenlet így alakítható át: $4X^2+4X+I_2=4\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}+I_2\Leftrightarrow\left(2X+I_2\right)^2=\begin{pmatrix}1 & 12\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ mi nem más, mint egy $Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ feladat, és ez éppen az előbbi feladat, ezért $Y = \pm\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ahonnan $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ és $X = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Megjegyzés: vegyük észre, hogy minden $aX^2 + bX + cI_2 = A$ másodfokú mátrixegyenlet az előbbi binomiális formára hozható, hiszen a másodfokú függvénynek van kannónikus alakja, miszerint

$$aX^2 + bX + cI_2 = A \Leftrightarrow a\left(X + \frac{b}{2a}I_2\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = A \Leftrightarrow \left(X + \frac{b}{2a}I_2\right)^2 = B \Leftrightarrow Y^2 = B$$

3. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $X^n = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített.

Megoldás: a karakterisztikus egyenlet alapján, mivel a (4)-es tulajdonság alapján $d = \det X = 0$ ezért $X^2 - t \cdot X = O_2 \Leftrightarrow X^2 = t \cdot X$ és ennek az ismételt alkalmazása nyomán indukcióval azonnal adódik, hogy $X^n = t^{n-1}X$ így az eredeti egyenlet alapján azt kapjuk, hogy $t^{n-1}X = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ és ha most mind a két oldal nyomát vesszük, akkor azt kapjuk, hogy $t^n = 5$. Ha n páros, akkor két valós megoldásunk van, $t = \pm\sqrt[n]{5}$ és ekkor $X = \pm\frac{1}{5^{\frac{n-1}{n}}}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, ha pedig páratlan, akkor $t = \sqrt[n]{5}$ és ekkor $X = \frac{1}{5^{\frac{n-1}{n}}}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Megjegyzés: vegyük észre, hogy az $X^n = A$ egyenlet megoldása során, mivel $\det A = 0$ ezért a $\det X^n = (\det X)^n = \det A = 0$ alapján $\det X = 0$ következik, így a karakterisztikus egyenlet alapján $X^2 - t \cdot X = O_2 \Leftrightarrow X^2 = t \cdot X$ aminek az ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy $X^n = t^{n-1}X$ vagyis $t^{n-1}X = A$ ahonnan azonnal adódik az X mátrix.

Nézzünk egy hasonló, de komplexebb feladatot.

4. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $X^n = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$ ahol $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített.

Megoldás: mivel jelen esetben is $\det A = \det\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} = 0$ ezért az előbbiekben leírtak szerint $X^n = t^{n-1}X$ és ha konkrétan $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ akkor $X^n = (a+b)^{n-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ezért az eredeti egyenlettel egybevetve azt kapjuk, hogy $(a+d)^{n-1}a = 6, (a+d)^{n-1}b = 4, (a+d)^{n-1}c = 15, (a+d)^{n-1}d = 10$ és az első és az utolsó egyenletek összegezéséből azt kapjuk, hogy $(a+d)^n = 16 \Rightarrow a+d = 16^{\frac{n-1}{n}}$ amit visszaírva az egyenletekbe azt kapjuk, hogy $a = \frac{6}{16^{\frac{n-1}{n}}}, b = \frac{4}{16^{\frac{n-1}{n}}}, c = \frac{15}{16^{\frac{n-1}{n}}}, d = \frac{10}{16^{\frac{n-1}{n}}}$, és ezek alapján $X = \frac{1}{16^{\frac{n-1}{n}}}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$.

5. **feladat**: Határozzuk meg az összes olyan $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $X^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.

2) **Megoldás**: Először is vegyük észre, hogy $\left(\det X\right)^4 = \det\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \det X = \pm 4$. Továbbá legyen $X^2 = Y$ így mivel $\det X = \pm 4$ és $(\det X)^2 = \det Y$ ezért $\det Y = 16$ és $Y^2 = 16I_2$. Ellenben a karatkerisztikus egyenlet alapján, amennyiben $t = TrY$, úgy $Y^2 - t\cdot Y + 16I_2 = O_2 \Leftrightarrow 16I_2 - t\cdot Y + 16I_2 = O_2 \Leftrightarrow t\cdot Y = 32I_2 \Leftrightarrow Y = \frac{32}{t}I_2$ ellenben $Y^2 = 16I_2$ ezért $\left(\frac{32}{t}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow t = \pm 8$. Tehát $Y = \pm 4I_2 \Leftrightarrow X^2 = \pm 4I_2$. Ellenben $X^2 = -4I_2 \Rightarrow \left(\det X\right)^2 = -4\det I_2$ ami nem lehetséges, mivel a baloldal nem negatív, míg a jobboldal negatív. Tehát $X^2 = 4I_2$ így megint

$(\det X)^2 = \det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \det X = \pm 4$ és ha $t = TrX$ akkor a karakterisztikus egyenlet alapján $X^2 - t\cdot X + 4I_2 = O_2 \Leftrightarrow 4I_2 - t\cdot X \pm 4I_2 = O_2 \Leftrightarrow X = \frac{8}{t}I_2$ tehát $\left(\frac{8}{t}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 4$ tehát $X = \pm 2I_2$ és ez valóban talál is az eredeti egyenletbe.

II.) **Az** $AX = XA$ **kommutálási módszere**

Ez a módszer egy különösen egyszerű megállapításon alakpszik: mivel rögzített $n \in \mathbb{N}^*$ esetén megoldandó egy $X^n = A$ alakú egyenlet, ezért ezt szorozzuk meg balról is majd jobbról is az X ismeretlen mátrixal. Ekkor azt kapjuk, hogy $X^{n+1} = XA$ illetve $X^{n+1} = AX$ és innen arra következtetünk, hogy az ismeretlen X mátrix kommutál az A mátrixal, vagyis $AX = XA$. A további megoldások során ezt fogjuk lényegesen kihasználni, ugyanis ha feltételezzük, hogy $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ akkor felírva az $AX = XA$ kommutativítást, innen az X mátrix egy sajátosabb alakot ölt, és ha így kiszámítjuk az X^n hatványt, akkor az $X^n = A$ egyenletből meghatározhatjuk az a, b, c, d számokat, így meghatározható az X ismeretlen mátrix.

6. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Ez a feladat megegyezik az 1. feladattal, de azért oldjuk meg ezzel a módszerrel is, hogy tudjuk összehasonlítani ugyanazon feladat megoldásán keresztül a két módszer hatékonyságát.

Megoldás: az $AX = XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ egyenlőségből azt kapjuk, hogy $a + 12c = a - 4b, b + 12d = 12a + b, -4a + c = c - 4d, -4b + d = 12c + d$ amit könnyűszerrel megoldva azt kapjuk, hogy $a=d, b=-3c$ vagyis $X=\begin{pmatrix} a & -3c \\ c & a \end{pmatrix}, a, c \in \mathbb{R}$. Innen azonnal adódik, hogy $X^2=\begin{pmatrix} a^2-3c^2 & -6ac \\ 2ac & a^2-3c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ és az $a^2-3c^2=1, 2ac=-4$ egyenlet rendszert helyettesítéssel megoldva azt kapjuk, hogy $a=\pm 2, c=\mp 1$ ezért a két megoldás $X=\pm\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $X^{100}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldás: Az $X\cdot X^{100}= X^{101}= X^{100}\cdot X$ kommutativitási tulajdonságot alkalmazzuk.

Legyen X= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, így $X^{101}= X\cdot X^{100}=\begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}$ illetve $X^{101}= X^{100}\cdot X=\begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix}$ és az előző összefüggés alapján, a megfelelő helyen levő elemek egyenlők, így d= a és c= -b adódik, ezért X= $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, így a megoldandó egyenletben a két oldal determinánsát véve kapjuk, hogy

$d^{100}= (\det X)^{100} =\det(X^{100})= 1$, ahonnan d= ± 1, ellenben a, b $\in$R miatt $a^2+b^2= 1$. Legyen

a= cos x és b= sin x, ahol x= arctg $\frac{b}{a}$. Induktív módon könnyen

igazolható, hogy $X^{100} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} \cos 100x & \sin 100x \\ -\sin 100x & \cos 100x \end{bmatrix}$. Így

a megoldandó egyenletünk $\begin{bmatrix} \cos 100x & \sin 100x \\ -\sin 100x & \cos 100x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ahonnan cos 100x= 0 és sin 100x= 1, ezért 100x= $\frac{\pi}{2}+2\cdot k\pi$, ahonnan

x = $\frac{(4k+1)\pi}{200}$ és k$\in$ Z, és a megoldás , X = $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$, valamint

x= arctg $\frac{b}{a}$ = $\frac{(4k+1)\pi}{200}$ $\Rightarrow$ b= a$\cdot$ $tg\,\frac{(4k+1)\pi}{200}$ szerint X= $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ alakba is visszaírhatunk.

8. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $X \in M_2(R)$ mátrixokat, amelyekre $X^{2021} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ adott számok.

Megoldás: Ha $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ akkor az $AX = XA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ egyenlet alapján azonnal adódik, hogy $x = t, z = -y$ ezért $X = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ és most írjuk fel polár koordinátákkal az $x = r\cos t, y = r\sin t$ ezért $X = r\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$ és indukcióval már igazoltuk, hogy $X^{2021} = r^{2021}\begin{bmatrix} \cos 2021t & \sin 2021t \\ -\sin 2021t & \cos 2021t \end{bmatrix}$ tehát $r^{2021}\cos 2021t = a, r^{2021}\sin 2021t = b$ ahonnan $tgt = \frac{b}{a} \Rightarrow t = \arctan\frac{b}{a} + k\pi$ továbbá $\sin^{2021} t = \frac{b^2}{r^{4041}}, \cos^{2021} t = \frac{a^2}{r^{4041}}$ ezért $r^{4041} = a^2 + b^2$ így $r = \sqrt[4041]{a^2 + b^2}$.

9. feladat: Legyen $t \in (0, \pi)$ rögzített valós szám. Határozzuk meg az összes olyan $X \in M_2(R)$ mátrixokat, amelyekre $X^n = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$.

Megoldás: az $AX = XA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

egyenlőségből azt kapjuk, hogy $a = d, b = -c$ tehát $X = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$.

Ugyanakkor $\det X^n = \det\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \Leftrightarrow (\det X)^n = 1 \Rightarrow \det X = \pm 1$,

vagyis $a^2 + c^2 = 1$ ezért létezik

$a = \cos x, c = \sin x$ így $X = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ és indukcióval már igazoltuk,

hogy $X^n = \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$, tehát $\begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

ahonnan azt kapjuk, hogy $nx = t + 2k\pi$ tehát a megoldások amelyek száma n, a következők: $X_k = \begin{bmatrix} \cos x_k & -\sin x_k \\ \sin x_k & \cos x_k \end{bmatrix}, k = \overline{0, n-1}, x_k = \dfrac{t + 2k\pi}{n}$.

10. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $X^{2007} + X = \begin{pmatrix} 2 & 2008 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Megoldás: ezúttal is felírható, hogy $X(X^{2007} + X) = (X^{2007} + X)X$ vagyis $AX = XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2008 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2008 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ahonnan azt kapjuk,

hogy $c = 0, d = a$ ezért $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$ és indukcióval igazolható, hogy

$X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ tehát $\begin{pmatrix} a^{2007} & na^{2006}b \\ 0 & a^{2007} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2008 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ahonnan

$a^{2007} + a = 2, 2007a^{2006}b + b = 2008$. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2007} + x - 2$. Könnyen látható, hogy a függvény monoton növekvő, ezért injektív, tehát ha $f(1) = 0$ akkor $a = 1$ az egyetlen megoldás, és azonnal adódik, hogy $b = 1$, ezért $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $X^n = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Megoldás: Legyen $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ akkor az $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ egyenlőségből azonnal adódik, hogy $z = 0, t = x + 3y$ tehát $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+3y \end{pmatrix}$. Ha most az X^n kiszámolására nem segít az indukció (mert nem kapunk nyilvánvaló összefüggéseket), akkor egy másik, már tanult módszerhez folyamodhatunk, a felbontás módszeréhez, miszerint $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+3y \end{pmatrix} = xI_2 + yA$, ahol $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. És mivel $xI_2 yA = yA xI_2$ ezért a Newton binomiális képlete alapján $X^n = \left(xI_2 + yA\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k A^k$ és mivel $A^k = 3^{k-1} A$ ezért azt kapjuk, hogy $X^n = x^n I_2 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} (3y)^k A = x^n I_2 + \frac{1}{3}\left[(x+3y)^n - x^n\right] A$. Tehát $X^n = \begin{pmatrix} x^n & \frac{1}{3}\left[(x+3y)^n - x^n\right] \\ 0 & (x+3y)^n \end{pmatrix}$ Így most az eredeti egyenlet alapján azt kapjuk, hogy $x^n = 3, x + 3y = 0, -\frac{1}{3}x^n = -1$ vagyis $x = \pm\sqrt[n]{3}, y = \mp\frac{\sqrt[n]{3}}{3}$.

12. feladat: Határozzuk meg az összes olyan $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixokat, amelyekre $X^{2023} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}$ ahol $k \in \mathbb{R}$ rögzített.

Megoldás: az $AX = XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}$ kommutativítás alapján azt kapjuk, hogy $c = 0, a + b = d$ ezért $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ és indukcióval könnyen igazolható, hogy

$X^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - 1 \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$ ezért az $\begin{pmatrix} a^{2023} & (a+b)^{2023} - 1 \\ 0 & (a+b)^{2023} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}$ egyenletből az következik, hogy $a = 1, k = (b+1)^{2023} - 1 \Rightarrow b = \pm\sqrt[2023]{k+1} + 1$.

Befejezésül hadd említsük meg, hogy az első módszer főleg akkor alkalmazható, amikor az $X^n = A$ egyenletben $n \in \{2,3,4\}$ vagy az $aX^2 + bX + cI_2 = A$ egyenlet esetén, de más n esetén, csak akkor, ha $\det A = 0$ A második módszer alkalmazható akármilyen n esetén, csak ne legyen $A = kI_2$ mert ekkor a kommutativítá nem vezet eredményre.

A bemutatottak jobb elmélyítése végett, az érdeklődő Olvasónak javasoljuk a következő feladatok megoldását:

1) $X^4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 2) $X^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $X^n = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$

5) $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7a \end{pmatrix}$ 6) $X^8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 7) $X^5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ 8) $X^6 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

9) $X^{2007} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ 10) $X^{2021} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 11) $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 12) $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 1 & 2022 \end{pmatrix}$

13) $X^5 + X = \begin{pmatrix} 34 & 162 \\ 1 & 34 \end{pmatrix}$ 14) $X^n + X^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.