A figurális számokról (IV.)

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A továbbiakban különféle számkombinációk és összefüggések reprezentálásáról, és bizonyos összegek kiszámolásáról írunk.

Sajátos összefüggések

Az előzőekben láttuk, hogy az n-edik k-szögszám képlete $S_n(k) = \frac{1}{2}[(k-2)n^2 - (k-4)n]$, minden $k \geq 3$ és $n \geq 1$ esetén.

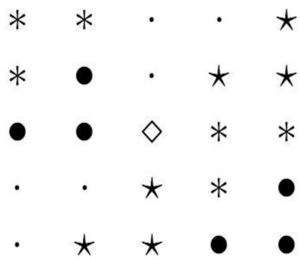
1. feladat: Igazoljuk, hogy $S_n(3) + S_{n-1}(3) = S_n(4)$ **.**

Ez a tulajdonság azt fejezi ki, hogy két egymás utáni háromszögszám összege éppen négyzetszám, pontosabban az n-edik és az (n-1)-ik háromszögszám összege éppen az n-edik négyzetszámmal egyenlő. Az ókori Görögök ezt az n=4 értékre így bizonyították:

Az összefüggés helyessége természetesen ellenőrizhető az $S_n(k)$ képlet segítségével.

2. feladat: Igazoljuk, hogy $S_{2n+1}(4) = 8 \times S_n(3) + 1$

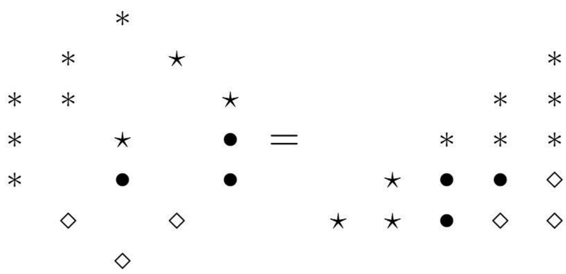
(**Diophantosz**, vagy **Plutarch** formula). Ez a tulajdonság azt fejezi ki, hogy az n-edik háromszögszám 8-szorosa meg 1, éppen a (2n+1)-ik négyzetszámot adja. Az n=2 esetet az ókori Görögök így ábrázolták:



Az összefüggés helyessége természetesen ellenőrizhető az $S_n(k)$ képlet segítségével.

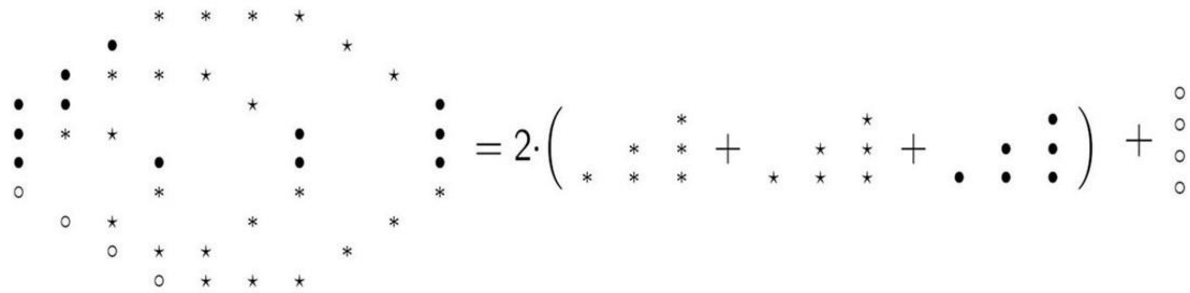
3. feladat: Igazoljuk, hogy $S_n(6) = S_{2n-1}(3)$ **(**a hatszögszám tétele)

Ez a tulajdonság azt fejezi ki, hogy minden hatszögszám egyben háromszögszám is, pontosabban az n-edik hatszögszám egyenlő a (2n-1)-ik háromszögszámmal. A következő ábra az n=3 esetet szemlélteti:



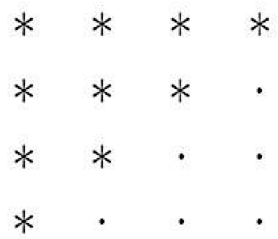
Az összefüggés helyessége természetesen ellenőrizhető az $S_n(k)$ képlet segítségével.

4. feladat: Igazoljuk, hogy $S_n(8) = 6\times S_{n-1}(3) + n$ (a nyolcszögszám tétele)
Ez a tulajdonság azt fejezi ki, hogy az (n-1)-ik háromszögszám hatszorosának és az n-nek az összege éppen az n-edik nyolcszögszámot adja. Az n= 4 esetet az ókori Görögök így reprezentálták:



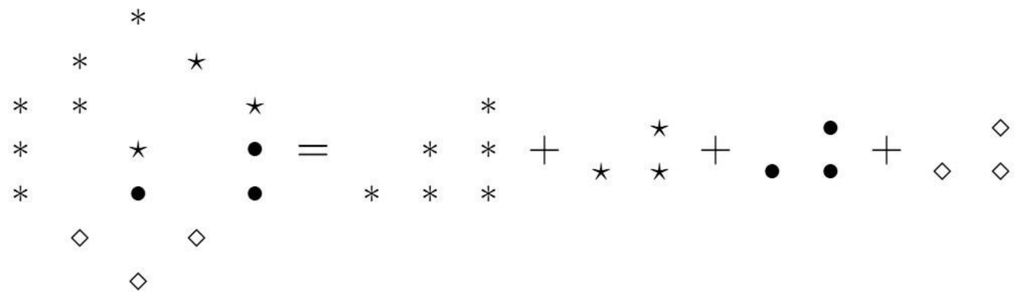
Az összefüggés helyessége természetesen ellenőrizhető az $S_n(k)$ képlet segítségével.

5. feladat: Igazoljuk, hogy $S_n(m) = S_n(m-1) + S_{n-1}(3)$ (**Nicomachus** formula)
Ez a tulajdonság azt fejezi ki, hogy az n-edik m-szögszám felírható az n-edik (m-1)-szögszám és az (n-1)-ik háromszögszám összegeként. Ezt az ókori Görögök n=m=4 esetben így szemléltették:



Az összefüggés helyessége természetesen ellenőrizhető az $S_n(k)$ képlet segítségével.

6. feladat: Igazoljuk, hogy $S_n(m) = S_n(3) + (m-3)\times S_{n-1}(3)$ (**Bachet de Mézirac** formula). Ez az összefüggés azt fejezi ki, hogy az n-edik m-szögszám felírható az n-edik háromszögszám és még (m-3)-szor az (n-1)-ik háromszögszám összegeként. Az m=6 és n=3 esetet az ókori Görögök így ábrázolták:



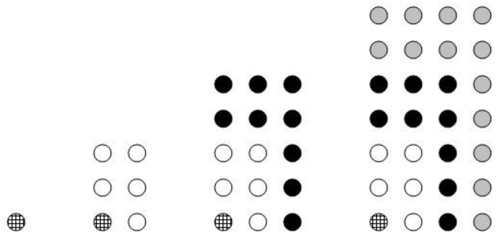
Az összefüggés helyessége természetesen ellenőrizhető az $S_n(k)$ képlet segítségével.

A következőkben rátérünk néhány sajátos összegnek a figuratív módszerrel történő kiszámolására, esetenként több megoldást is mutatunk.

Sajátos összegek kiszámolása

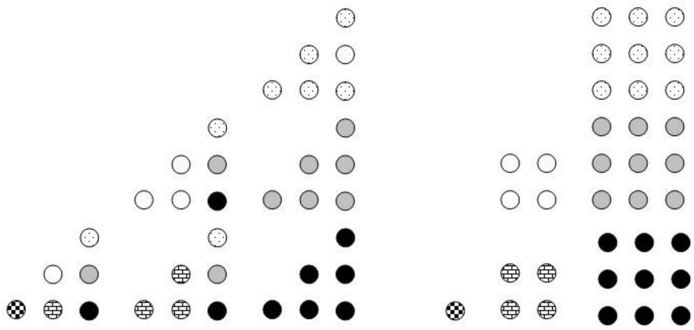
7. feladat: Igazoljuk, hogy $1+5+9+13+...+(4n-3) = n(2n-1) = S_n(6)$

Az összefüggés tulajdonképpen azt mutatja, hogy az n-edik hatszögszám miként írható fel összegként. Az $n \in \{1,2,3,4\}$ esetek reprezentálása már megadja a bizonyítás ötletét:



8. feladat: Igazoljuk, hogy $(1+2+3+...+n)^2 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$

Az összefüggést úgy is igazolhatnánk, hogy kiszámítsuk a baloldali és a jobboldali összegeket, ellenben most egy roppant ötletes összefüggést használunk, amely az egyenlőséget szemlélteti n= 3 esetén. Ebből lehet következtetni az általános bizonyításra:



9. feladat: Határozzuk meg a 100-adik háromszögszámot, vagyis a $H_{100} = 1+2+3+...+99+100$ összeget!

1. Megoldás: Sokak számára már nem újdonság az, ahogyan **Karl F. Gauss** (1777–1855) német matematikus, minden idők egyik legnagyobb matematikusa, még elemi iskolai tanuló korában ámulatba ejtette tanítóját, mert fejben kiszámolta olyan összegek eredményét, amelyek nem azonnaliak. Egy ilyen példa éppen az

$$1+2+3+...+99+100 = 5050$$

összeg eredménye, amely tulajdonképpen a H_{100}-at jelenti.

Gauss gondolatmenetének a lényege a következő volt: ha az összeg kétszeresét vesszük, akkor rendre a következő egyenletek írhatók fel:

$$2\cdot(1+2+3+...+99+100) = (1+2+3+...+99+100)+(100+99+...+3+2+1) =$$
$$= (1+100)+(2+99)+...+(99+2)+(100+1) = 100\cdot 101.$$

Tehát $1+2+3+...+99+100 = \dfrac{100\cdot 101}{2} = 5050.$ (1)

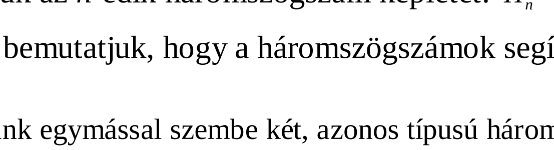
Ennek mintájára igazolható, hogy bármely *n* pozitív egész szám esetén

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (2)$$

Ezáltal megkaptuk az *n*-edik háromszögszám képletét: $H_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

A továbbiakban bemutatjuk, hogy a háromszögszámok segítségével a H_n meghatározása még szemléletesebb.

2. Megoldás: Illesszünk egymással szembe két, azonos típusú háromszögszámot, ahogyan a következő ábrák mutatják. Így egy-egy téglalapszámot kapunk:

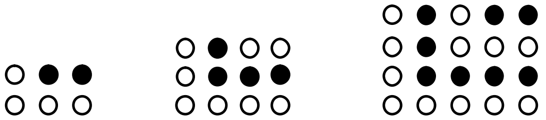


$$1+2=\frac{2\cdot 3}{2} \qquad 1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2} \qquad 1+2+3+4=\frac{4\cdot 5}{2}$$

Hasonló módszerrel azonnal belátható mind az (1), mind a (2) reláció is. Észrevehető, hogy a 2. módszerben a figurális számokkal ugyanazt tettük, mint az 1. módszerben, ugyanis mindkét esetben „szembehelyeztük” egymással a számokat.

10. feladat: Számítsuk ki a $2+4+6+8+...+98+100$ összeget!

Megoldás: Nyilvánvaló, hogy kiemelve minden tagból a 2-t, a feladatot máris visszavezettük az előbbiekre. Így szemléletesebben is bizonyíthatunk.
A tágabb értelemben vett gnómonszámokból rakjuk ki rendre a következő téglalapszámokat:



$2+4=2\times 3 \quad 2+4+6=3\times 4 \quad 2+4+6+8=4\times 5$

A szemléltetett elrendezés alapján könnyen belátható, hogy

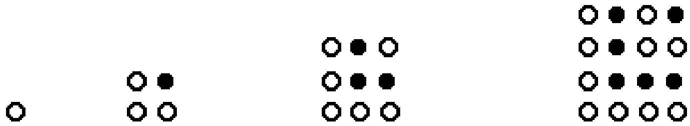
$$2+4+6+...+98+100=49\times 50$$

valamint az is, hogy általában minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén

$$2+4+6+...+(2n-2)+2n=n(n+1).$$

11. feladat: Számítsuk ki az $1+3+5+...+97+99$ összeget!

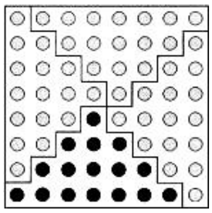
1. Megoldás: Ezúttal is egy szemléletes megoldást mutatunk be.
A gnómonszámokból rakjuk ki rendre a következő négyzetszámokat:



$1 \quad 1+3=4 \quad 1+3+5=9 \quad 1+3+5+7=16$

A fenti elrendezések alapján könnyen belátható, hogy $1+3+5+...+97+99=50\cdot 50=50^2$, valamint az is, hogy általában minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén $1+3+5+...+(2n-3)+(2n-1)=n^2$.

2. Megoldás: Hasonló szemléletes bizonyítás olvasható le a következő ábráról is.



Ennek alapján igazolható, hogy $1+3+...+(2n-1)=\frac{1}{4}(2n)^2=n^2$.

Megjegyzés: Megfigyelhető, hogy az előbbiekben olyan összegeket számoltunk ki, amelyben az egymás utáni tagok különbsége állandó (például $2-1=3-2=4-3=...=1$, stb).
Ezért az 9. feladat 1. megoldása során alkalmazott módszerrel könnyen bizonyítható, hogy

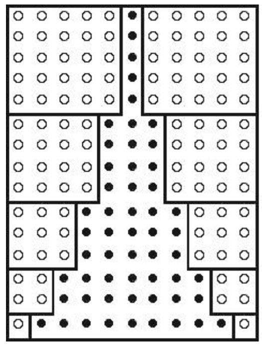
$$(a+r)+(a+2r)+...+(a+nr)=n\cdot a+\frac{n(n+1)}{2}r,$$

ahol $r\neq 0$ és $n\in\mathbb{N}^*$. Így eljutunk az ún. számtani haladvány (sorozat) első *n* tagjának az összegképletéhez, amit már Babilóniában Kr. e. a VI–III. században, a hinduk az V–XII. században, a kínaiak pedig a VI–IX. században ismertek.

12. feladat: Számítsuk ki az $1^2+2^2+...+100^2$ összeget!

1. Megoldás: Érdemes megjegyezni, hogy a négyzetszámok összegezési eljárását a babilóniai matematikusok már i. e. 600 és i. sz. 300 között ismerték. Kínában 1050-ben **Csön Huo** (1011–1075) határozta meg először az első n négyzetszám összegét. Az összegezési eljárás **Sen Ko** (XI. sz.), **Jang Huj** (XIII. sz.) és **Csu-Si-Kie** (XIV. sz.) műveiben is megtalálható (lásd az alábbi eljárást). Az indiai matematikusok az V. és XII. század között szintén ismerték az összegezés módját.

Jang Huj és **Csu-Si-Kie** a mellékelt ábrán látható téglalapról olvasta le az összeget, miután megfigyelték, hogy:
$1^2=1$; $2^2=1+3$; $3^2=1+3+5$; $4^2=1+3+5+7$; …; $100^2=1+3+5+...+199$
összegezéssel felírták, hogy: $1^2+2^2+...+100^2=100\cdot1+99\cdot3+98\cdot5+...+1\cdot199$ (*)



Az ábra az $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ összeg háromszorosát szemlélteti: a sötét pontok ennek az összegnek a (*) alakú átrendezését, míg a karikák a négyzetszámok kétszeres összegét.

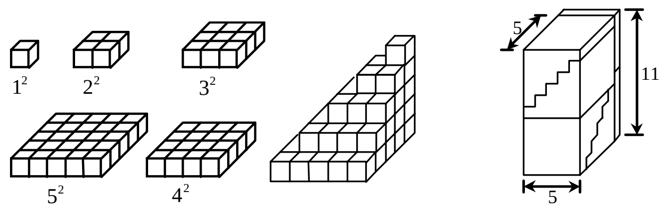
Al-Kashi szamarkandi perzsa matematikus (a XV. sz. elején) *A számítások kulcsa* című könyvében n = 100-ra a következő bizonyítási eljárást használja:

$$3(1^2+2^2+...+100^2)\overset{(*)}{=}2(100^2+99^2+...+2^2+1^2)+(100\cdot1+99\cdot3+98\cdot5+...+1\cdot99)=$$
$$=(2\cdot100^2+100\cdot1)+(2\cdot99^2+99\cdot3)+...+(2\cdot2^2+2\cdot98)+(2\cdot1^2+1\cdot99)=$$
$$=100\cdot201+99\cdot201+...+2\cdot201+1\cdot201=201(1+2+...+100)=201\frac{100\cdot101}{2}.$$

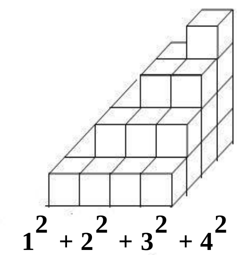
Tehát $1^2+2^2+...+100^2=201\frac{100\cdot101}{6}$, és ennek alapján, teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy:

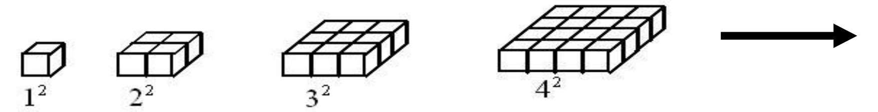
$$1^2+2^2+...+n^2=(2n+1)\frac{n(n+1)}{6}.$$

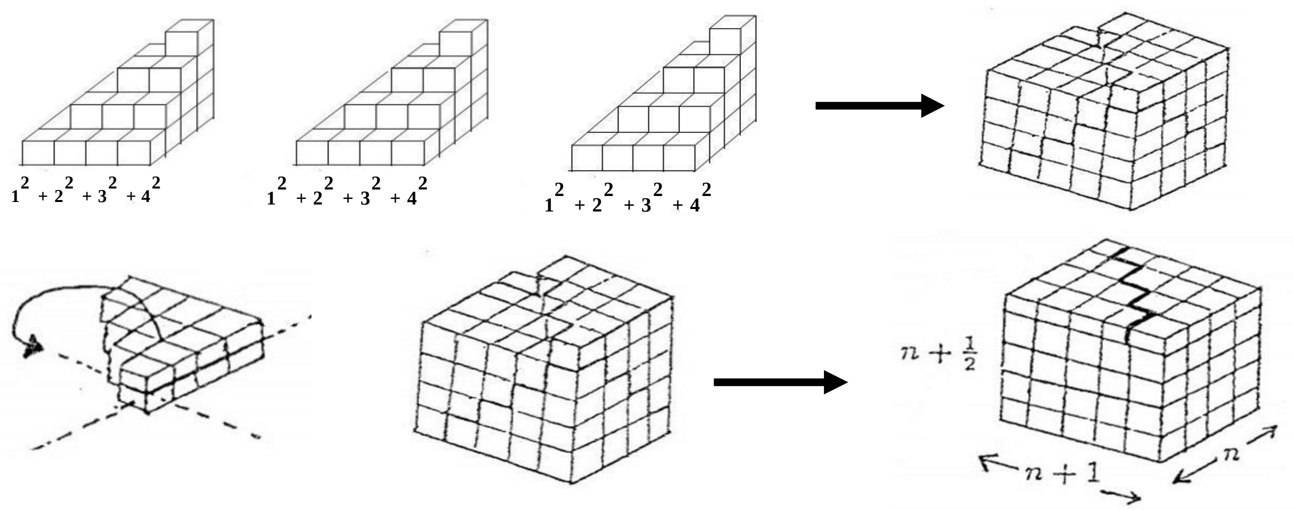
2. Megoldás: Készítsük el a bal oldali ábrán látható darabokat. (Az n = 5 eset szemléltetését, azaz csak az $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ összeg képletének a szemléltetését mutatjuk be.) Amennyiben ezeket a darabokat összerakjuk, a középső ábrán látható testet kapjuk. Ha 6 ilyen testet összerakunk, a jobb oldali ábrán látható $5\cdot6\cdot11$ térfogategységnyi testet kapjuk:



3. *Megoldás*: Az alábbiakban az $1^2+2^2+3^2+4^2$ összeg szemléletes kiszámolását látjuk:





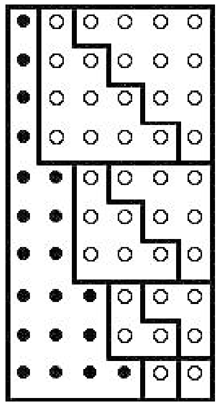


Ez a módszer a kínai **Csebgcsu Tongbian Szuanbao** (13. század) matematikustól származik, és tulajdonképpen azt szemlélteti, hogy

$$3(1^2+2^2+...+n^2)=n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

Az előbbiekkel rokon ötlet alapján kiszámíthatjuk az első n háromszögszám összegét is.

13. feladat: Számítsuk ki a $t_{100}=H_1+H_2+...+H_{100}=1+3+6+...+\frac{100\cdot 101}{2}$ összeget!



Megoldás: Végezzük el a következő átalakítást, és figyeljük meg a mellékelt ábrát*:*

$1=1$*;* $3=1+2$*;* $6=1+2+3$*;* $10=1+2+3+4$*;…* $\frac{100\cdot 101}{2}=1+2+3+...+100$

összegezéssel felírható, hogy: $t_{100}=100\cdot 1+99\cdot 2+98\cdot 3+...+2\cdot 99+1\cdot 100$ (**)

Az ábrán a sötét ponttal jelölt rész jelenti n = 4-re a t_4-et a (**) átrendezés szerint. A karikával jelölt rész t_4-nek a kétszeresét jelöli, két azonos típusú háromszögszámot téglalapszámmá illesztve össze. A (**) alapján az előző ábra a következő bizonyítást sugallja:

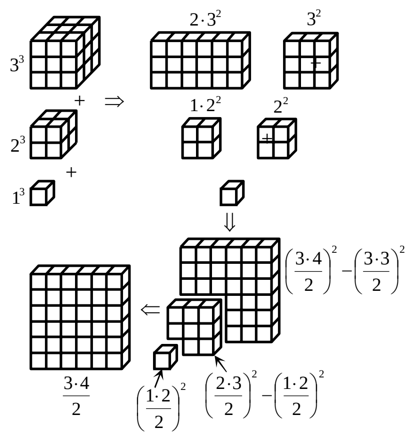
$$3\cdot t_{100}=(100\cdot 1+99\cdot 2+98\cdot 2+...+2\cdot 99+1\cdot 100)+2\cdot\left(\frac{100\cdot 101}{2}+\frac{99\cdot 100}{2}+...+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{1\cdot 2}{2}\right)=$$

$$=100\cdot(1+101)+99\cdot(2+100)+...+2\cdot(99+3)+1\cdot(100+2)=102\cdot(1+2+3+...+100)=\frac{100\cdot 101\cdot 102}{2}$$

Tehát $t_{100}=\frac{100\cdot 101\cdot 102}{6}$. Hasonlóan bizonyítható, hogy minden n pozitív egész szám esetén:

$1+3+6+10+...+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, vagyis az n-edik tetraéderszám képlete: $t_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

14. feladat: Számítsuk ki az $1^3+2^3+...+99^3+100^3$ összeget!



Megoldás: Jól megfigyelve a szemléltetett sajátos esetet, ez a következőket sugallja:

$$n^3=(n-1)n^2+n^2=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}n+n^2=$$

$$=\left[\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}n+n^2\right]-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2.$$

Tehát $n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$. Ez alapján, ugyancsak az ábrát követve igazolható, hogy,

$$1^3+2^3+3^3+...+100^3=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2+\left[\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2-\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2\right]+...$$

$$...+\left[\left(\frac{99\cdot 100}{2}\right)^2-\left(\frac{98\cdot 99}{2}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{100\cdot 101}{2}\right)^2-\left(\frac{99\cdot 100}{2}\right)^2\right]=\left(\frac{100\cdot 101}{2}\right)^2.$$

Tehát $1^3+2^3+...+99^3+100^3=\left(\frac{100\cdot 101}{2}\right)^2=(1+2+3+...+99+100)^2$.

A (*) alapján hasonlóan bizonyítható, hogy minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén

$$1^3+2^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=(1+2+...+n)^2.$$

Befejezésül megjegyezzük, hogy az előbbiekben bemutatott reprezentációk alapján az érdeklődő Olvasó még sok más, hasonló összefüggés bizonyítását megkísérelheti.

Forrásanyag:

[1] http://oeis.org/wiki/Centered_polygonal_numbers
[2] http://www.virtuescience.com/centered-polygonal.html
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Centered_number
[4] http://mathworld.wolfram.com/CenteredPolygonalNumber.html
[5] http://oeis.org/wiki/Platonic_numbers
[6] http://mathworld.wolfram.com/FigurateNumber.html
[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Figurate_numbers
[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Figurate_number
[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_number
[10] http://mathworld.wolfram.com/FigurateNumber.html
[11] http://oeis.org/wiki/User:Peter_Luschny/FigurateNumber
[12] http://www.whatabeginning.com/ASPECTS/ASPECTS_FN.htm
[13] http://bbs.sachina.pku.edu.cn/stat/math_world/math/f/f132.htm
[14] http://www.biblewheel.com/GR/GR_Figurate.php
[15] Tuzson Zoltán: Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat, Ábel kiadó, Kolozsvár, 2011