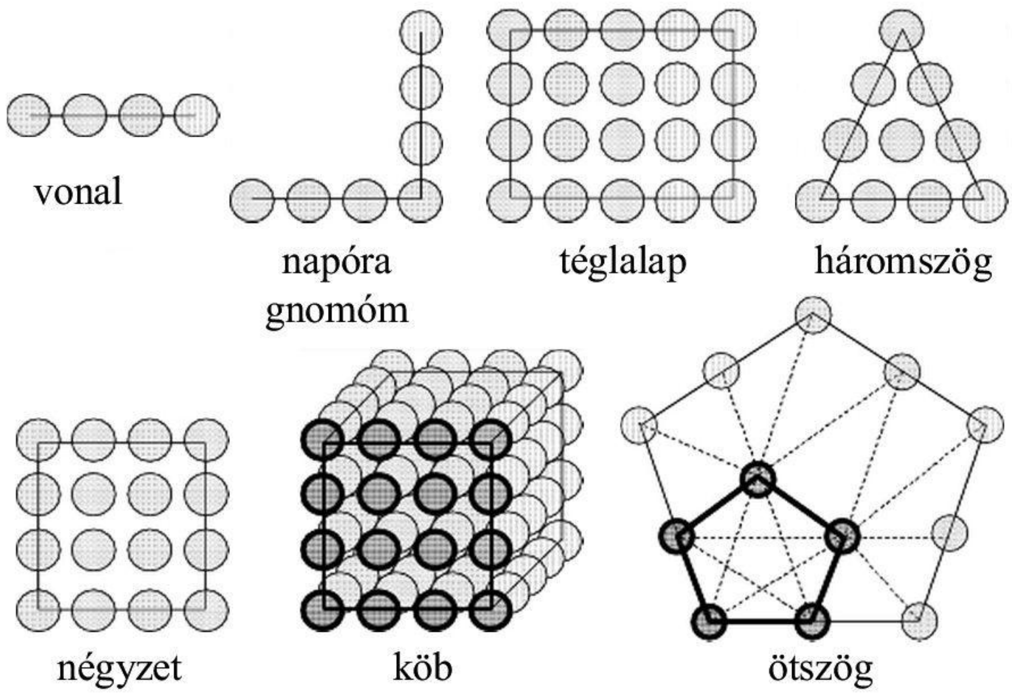
A figurális számokról (I.)

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A figurális számok felfedezését a pitagoreusoknak tulajdonítják, mert ők a számokat kavicsokkal, magokkal szemléltették. Sok esetben így jelképezték tételeik igazát. Megpróbáltak különböző számú kavicsból szabályos alakzatokat kirakni. Azokat a számokat amelyekből sikerült egy adott alakzat kirakása, figurális számoknak nevezték.

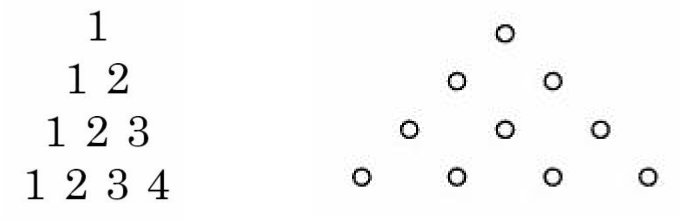
Például a négyzet: 1, 4, 16, 25,…; a háromszög 1, 3, 6, 10, 15, … darab kavicsból rakható ki. Tehát az egyes figurális számokat az illető alakzatokról nevezték el. Néhány fontosabb figurális szám például a következő: *Vonal-számok* (minden természetes szám), *Gnómon-napóra* (a páratlan számok), *Téglalap-számok* (minden összetett szám), *Négyzetszámok*, *Háromszögszámok* (a számok összege 1-től), *Köbszámo*k, Ötszögszám, stb.



Pitagorasz egy titkos szektát alapított a dél-itáliai Krotonban (kb. Kr. e. 585- 400), filozófiája és a matematika művelésére, akiket pitagoreusoknak hívtak. Az elért matematikai eredményekről nem állapítható meg melyik az ő és melyik követői felfedezése, ezért szoktak összefoglalóan a pitagoreusok matematikájáról beszélni, kivéve a Pitagorasz-tételt. Ezt Pitagorasz bizonyította be először, valószínűleg területátalakítással. A pitagoreusok filozófiájukból következően behatóan foglalkoztak a számokkal — amin mindig természetes szám értendő —, így a számelmélet megalapozói lettek. Az egyes számoknak különleges jelentést tulajdonítottak. Az egy nem igazi szám, hanem az egység, amelyből a többi szám származik. Az egy a lényeg száma és férfi szám. A kettő az első női szám, az ellentét (a másság) száma. A három a harmónia jelképe, mert az egység és különbözőség összege, valamint az első igazi férfi szám. A négy az igazság száma, mert a különbözőség önmagával való szorzata. Az öt a házasság jelképe, mert az első női és férfi szám összege. A hat a teremtés száma, mert Isten ennyi nap alatt teremtette meg a világot. Mint látjuk, a páratlan számok náluk is férfi, a páros számok pedig női számok.

A figurális számsorozatok összehasonlításával több fontos számelméleti törvényt ismertek fel. A szabályos elrendezés a világ harmóniájának a jelképe. A számok figurális jellemzői ugyanolyan egyediek, mint az oszthatósággal kapcsolatos vonzatok.

A legszentebb, a legtöbb jelentést hordozó szám a pitagoreusok számára a tíz volt. Összege volt a világ gyökereinek tekintett 1, 2, 3, 4 számoknak, így a világ teljességét jelképezte. Háromszögalakban való felírása egyik titkos jelképük volt: a szent tetraktüsz.

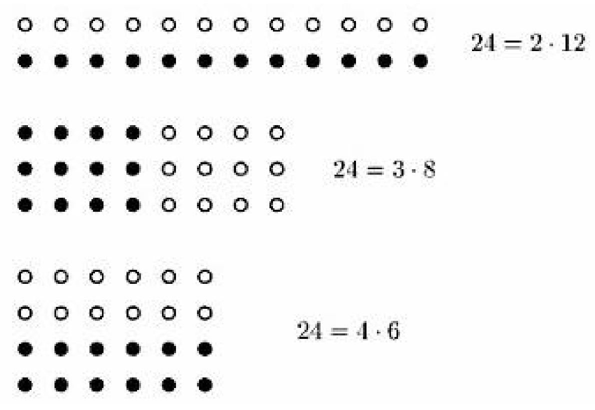


A mágikus négyességben is megjelenik a három legfontosabb konszonancia: az oktáv (2:1), a kvint (3:2) és a kvart (4:3).

Tíz bolygót, valamint tíz ellentétpárt tételeztek fel, úgymint: páros - páratlan, határolt - határtalan, jó- rossz, jobb- bal, egyenes- görbe, négyzet- téglalap, fény- sötétség, nyugalom- mozgás, egy- sok, férfi- nő. A tíz az összege a lehetséges geometriai dimenzióknak, valamint az első olyan szám, amelynél kisebbek közt ugyanannyi prím van, mint összetett.

Az elmondottakból az is kiderül, hogy a pitagoreusok ismerték a prímszám és összetett szám, a páros és páratlan szám fogalmát, valamint több számelméleti összefüggést. Módszerük a számoknak különböző formában való kirakása volt kavicsokkal, ami a számolótábla használatával volt összefüggésben. Így jutottak el például a figurális számokhoz. Módszerük továbbfejlesztett változata ma is fontos eszköze lehetne a számelmélet elemei tanításának. A páros és páratlan számok fogalmához úgy jutottak, hogy fehér és fekete kavicsokkal felváltva rakták ki két sorban a férfi és nő számokat. Azokat, amelyek kirakhatók voltak egy-egy ugyanannyi kavicsot (pontot) tartalmazó sorba felezhetőknek (párosoknak) nevezték. A többit nem felezhetőnek (páratlannak) nevezték el, mert náluk az egyik sorban az egyik fajta számból több volt.

E módszer folytatásaként adódnak a vonalszámok, illetve síkszámok. Az előzőek nem bonthatók tényezőikre, ezért csak egy sorban rakhatók ki (prímszámok). A síkszámok két (valódi) tényezőre bonthatók, ezért téglalap alakban rakhatók ki.



Minden nem törzsszám téglalapszám, illetve törzsszámot nem lehet téglalap elrendezésben kirakni. Figyelemreméltó, hogy a téglalapszámok közül is kitüntették az $(n+1)\times n = n^2 + n$ vagyis 2×1, 3×2, 4×3,… alakúakat, amelyeknél a két oldal között egységnyi a különbség.

A téglalap számok közül azokat, amelyek két egyenlő tényező szorzatára is bonthatók, négyzetszámoknak nevezték, mert. csak ezek rakhatók ki négyzet alakban. Hasonlóan adódott a köbszám elnevezés is a három egyenlő tényezőre bontható számokra, amelyek kocka alakban rakhatók ki.

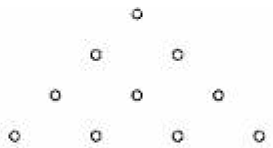
A más alakzatban kirakott számok, azaz a háromszögszámok, négyszögszámok, ötszögszámok, gnómon számok tanulmányozása érdekes számelméleti összefüggések megsejtését teszi lehetővé.

Figurális módszerrel kerestek pitagoraszi számhármasokat is. Írjuk egymás alá a négyzetszámokat és a páratlan számokat:

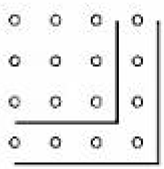
1	4	8	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25

Az alsó sor minden négyzetszáma a fölötte levő kettővel együtt pitagoraszi számhármast alkot.

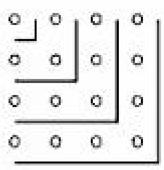
Az alábbiakban nézzünk néhány figurális számot, és a belőlük megsejthető összefüggéseket:



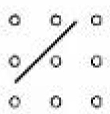
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$



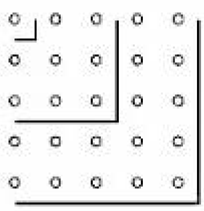
$$n^2+2n+1=(n+1)^2$$



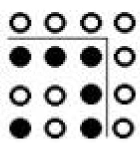
$$1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$$



$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}(n+2)=(n+1)^2$$

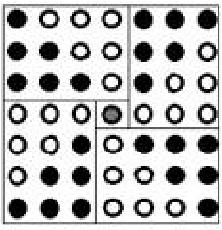


$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+n^3 &= \\ (1+2+\cdots+n)^2 &= \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2\end{aligned}$$



$$2n+1=m^2 \Rightarrow n^2+m^2=(n+1)^2$$

(pitagoraszi számhármasok)

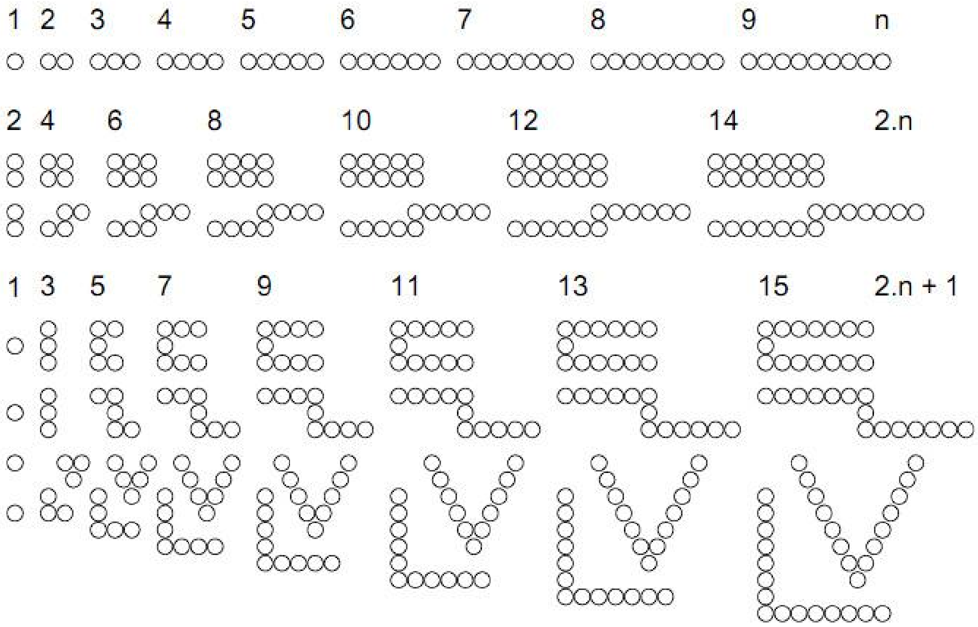


8 háromszögszám + 1= négyzetszám

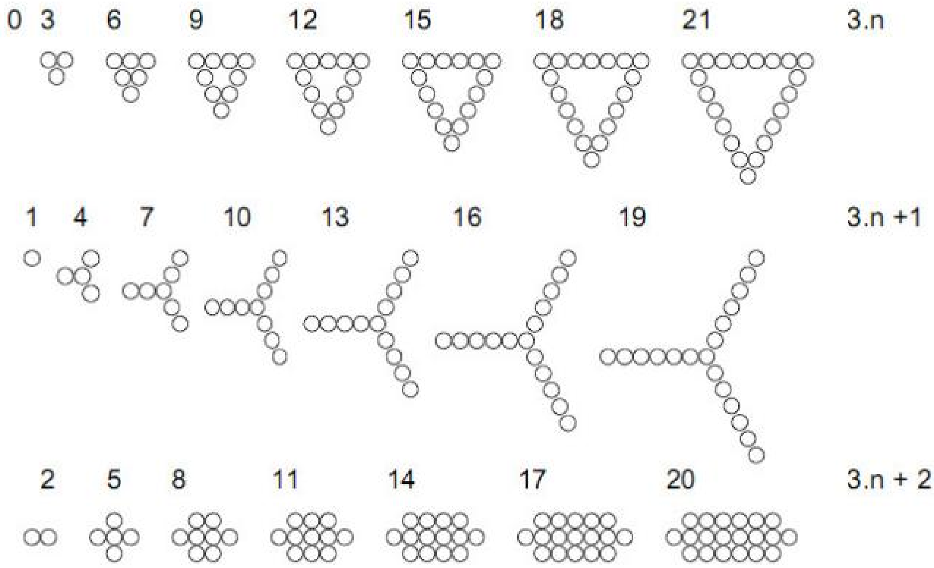
$$8\cdot\frac{n(n+1)}{2}+1=(2n+1)^2$$

A pitagoreusok vezették be a tökéletes számok és a barátságos számok fogalmát is. Tökéletes az a szám, ami előáll részeinek, azaz osztóinak összegeként, a számot nem beleértve. A figurális módszerben a résznek szemléletes jelentése van, amibe a szám nyilvánvalóan nem tartozik bele. A legkisebb ilyen szám a 6 (= 1 + 2 + 3), így a tökéletes elnevezést azzal indokolták, hogy Isten hat nap alatt teremtette meg a világot. Olvasható, hogy a sumeroknál, a hat napos teremtés mítosza nemcsak a Bibliában van meg. Egy későbbi matematikus szerint a mai földi élet tökéletlensége abból adódik, hogy Noé bárkájából nyolc ember kezdte újra kiépíteni, és a nyolc nem tökéletes, hanem hiányos szám (1 + 2 + 4 < 8).

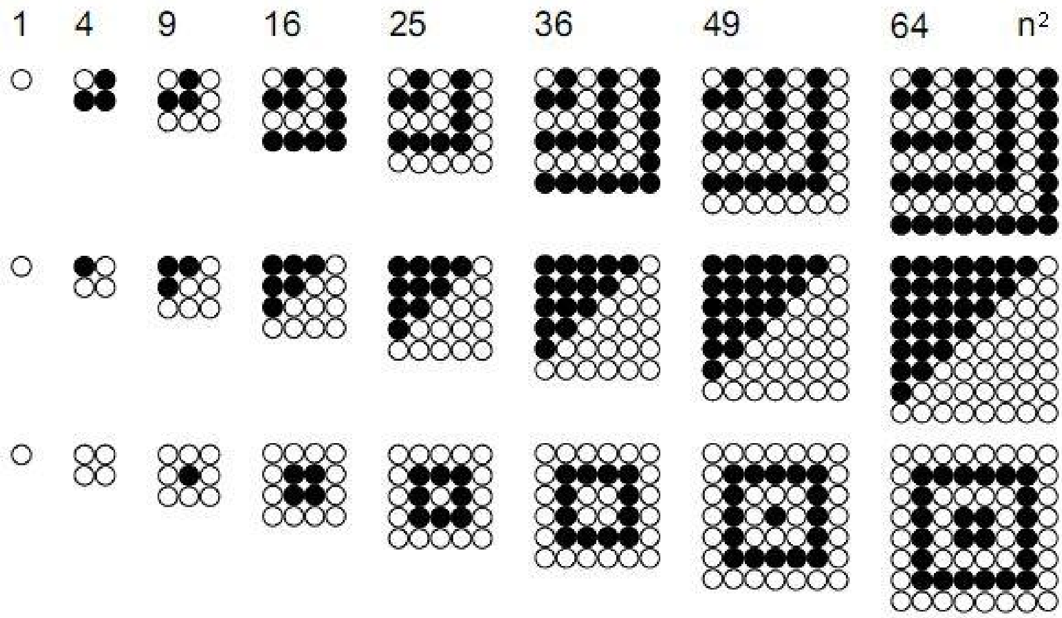
Visszatérve a figurális számokhoz megjegyezzük, hogy számos szimmetrikus síkbeli elrendezések újabb és újabb figurális számtípusokat alakított ki, ilyenek például a következők:



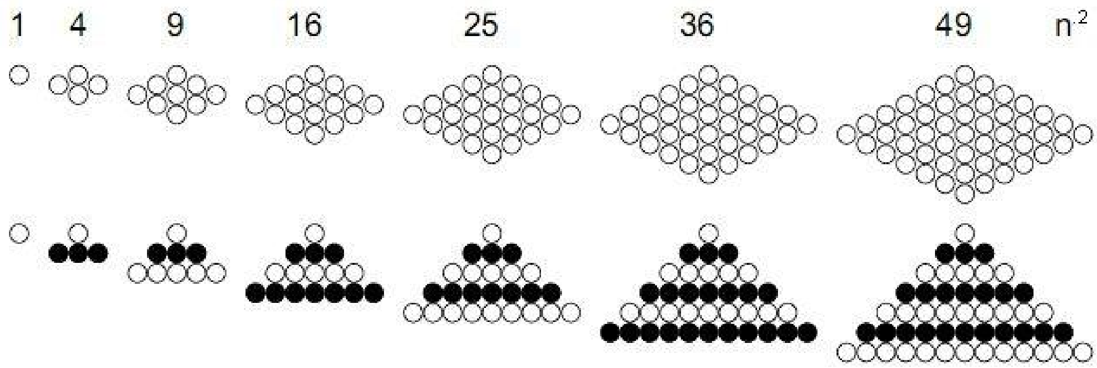
Más példa, a természetes számoknak a csoportosítása adott számmal való osztási maradékai szerint, például a 3n, 3n+1 és a 3n+2 alakú számok reprezentációi a következők:



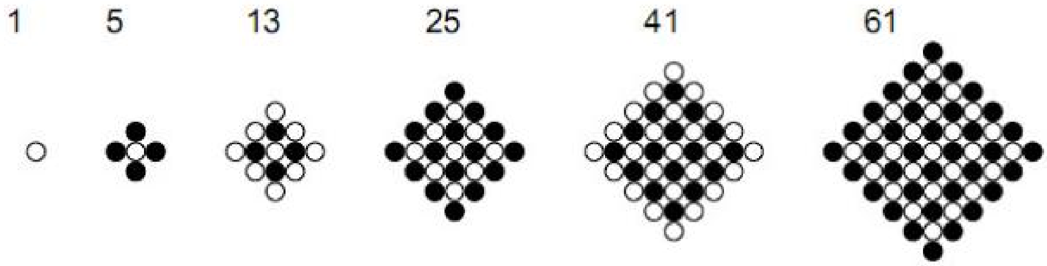
A négyzetszámok figuratív reprezentálása, és a belőlük levezethető különféle összefüggések szemléltetését láthatjuk az alábbiakban:



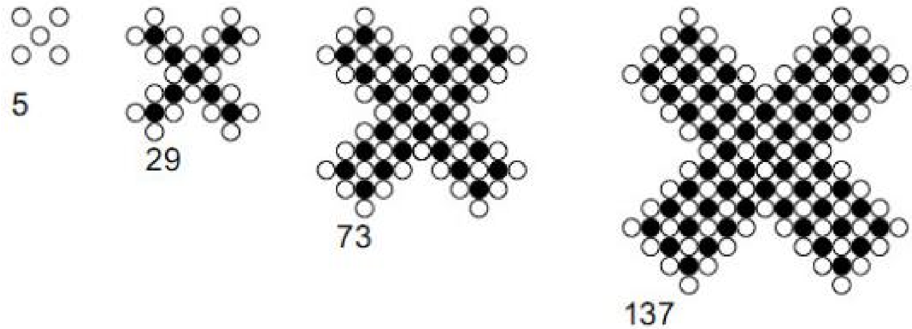
A négyzetszámok érdekes módon átrendezhetők rombusz- illetve háromszög számok formájába is:



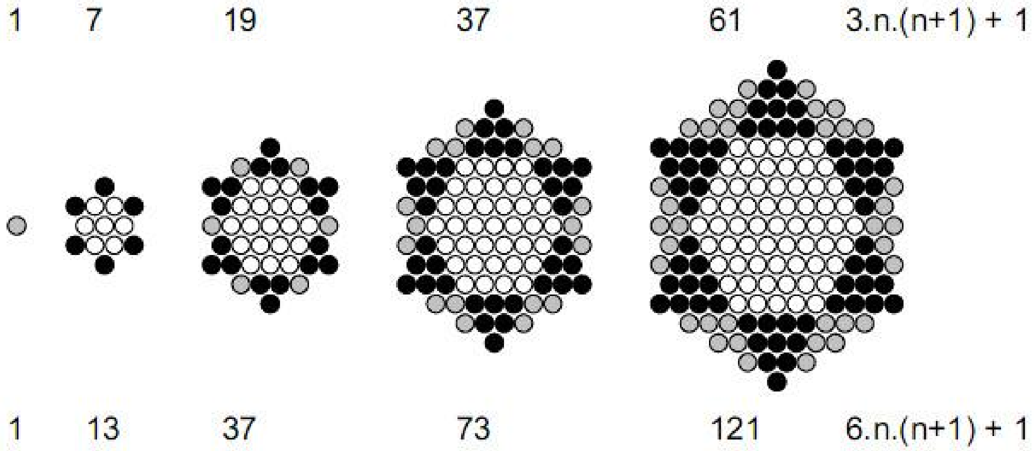
A négyzetszámokból kiindulva alakultak ki a gyémánt-számok amelyek az $n^2+(n+1)^2=2n(n+1)+1$ összefüggést szemléltetik:



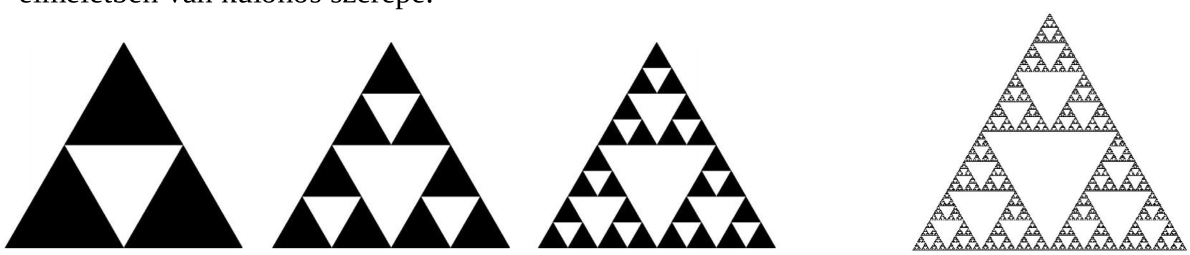
Az előbbiekhez kapcsolódnak a Görög- keresztszámok amelyek 5 darabab gyémántszám meg 4n összegből állnak elő, vagyis $10n^2+14n+5$ összefüggéssel adott számok. Néhány ilyen szám a következő ábrán látható:



További figurális számok a háromszög számokból erednek. Éspedig a hatszögszám 6 háromszögszám + 1 összegből adódik, és a képlete $3n^2+3n+1=(n+1)^3-n^3$. Teljesen hasonlóan bevezethetők a csillag hatszögszámok is, mint 12 háromszögszám + 1 összege. Ebből adódik a képlete is, ami $6n^2+6n+1$. A következő ábrán mindkét számtípus látható:



A hatványszámokhoz kapcsolódik a Sierpinski-féle háromszög, amelynek a fraktálok elméletben van különös szerepe:



Az ábrákon a sötét háromszögeket számolva belátható, hogy ezek tulajdonképpen a három hatványainak a reprezentálásuk.

Mielőtt rátérnénk a különféle figurális számok rendszerezett és átfogó bemutatására, valamint alkalmazására, föltétlen meg kell jegyeznünk, hogy ezeket főleg a következő kategóriák szerint osztályozandók: poligonális, poliéder és politóp számok. Ezen fogalmak tartalma a következő: az elemi geometriában a politóp lapos oldalakkal rendelkező mértani objektum, ami bármilyen dimenziószám esetén létezhet. A sokszög (poligon) a két dimenziós politóp neve, a poliéder a három dimenziósé és így tovább. Léteznek az elvnek további általánosításai, mint a határtalan politópok (apeirotópok és csempézések) vagy az absztrakt politópok. Az n-dimenziós általánosításokat *n*-politóp-nak szokás nevezni. Például a sokszög a 2-politóp, a poliéder a 3-politóp. Ezek keretén belül léteznek tehát a síkbeli és a térbeli szabályos alakzatok csúcsaiba elrendezett pöttyök alapján kapott figuratív számok. Ezeknek egy – egy osztályát képezik a középpontos sokszögszámok is.