A figurális számokról (II.)

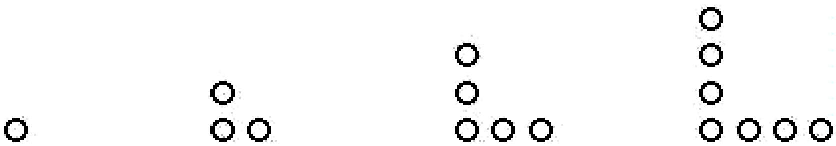
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A figurális számok jelölése nem egységes, ugyanis minden nyelven más-más féle képpen jelölik, legtöbb esetben a megnevező szó első betűjével. A továbbiakban mi is sajátos jelöléseket használunk.

1. A gnómon számok

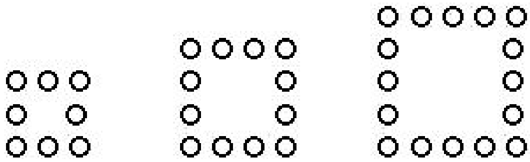
A gnómon egy L-alakú tájoló műszer volt, ami naptárként, iránytűként és óraként is szolgált. A pitagoreusok a páratlan számokat nevezték gnómonoknak. Az egymást követő négyzetszámok különbségét (a páratlan számok) ugyanis gnómon formában ábrázolhatjuk:

Mivel a gnómonszámok a páratlan természetes számok, ezért a képlete $G_n = 2n - 1$ minden pozitív n természetes számra, és a reprezentációjuk így néz ki:



$G_1 = 1$ $G_2 = 3$ $G_3 = 5$ $G_4 = 7$

2. A keretszámok



$k_1 = 8$ $k_2 = 12$ $k_3 = 16$

Észrevehető, hogy a keretszámok tulajdonképpen a 4-gyel osztható pozitív egész számokat jelentik. Az *n*-edik keretszám képlete: $k_n = 4n$, minden n természetes számra.

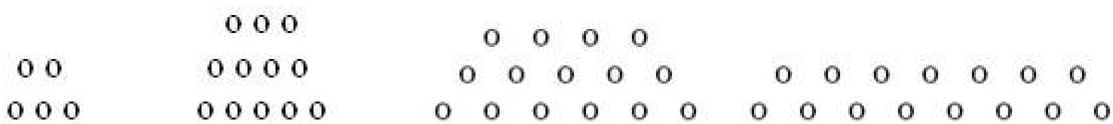
3. A téglalapszámok

$T_1 = 2$ $T_2 = 6$ $T_3 = 12$ $T_4 = 20$

Észrevehető, hogy a téglalap számok képlete $T_n = n(n+1)$ és mint látni fogjuk, éppen a háromszög számoknak dupájával egyenlők, de általánosabban téglalap számnak nevezzük az $n(n+k)$ típusú számokat is, ahol $k \in N^*$.

4. A trapézszámok

Értelmezés szerint egy, vagy több egymás utáni természetes szám összege. Vagyis egyenlő szárú trapéz formájában elhelyezett kavicsok.



A szűkebb értelemben vett trapézszámok (amikor csak két egymás utáni számból állnak) képlete szintén a páratlan számok képlete, hiszen n+ (n+1)= 2n+1.
Azonban az általános képlete az

$$Tr_n(k) = k + (k+1) + (k+2) + ... + (k + (n-1)) = \frac{n(2k+n-1)}{2}$$, ahol n és k tetszőleges természetes számok.

Észrevehető, hogy a trapézszámok felírhatók két háromszögszám különbségeként, vagyis $(1+2+...+n)-(1+2+...+(k-1) = k+(k+1)+...+(k+n-1)$.

A továbbiakban térjünk át a szabályos sokszögek alapján származtatott figuratív számok ismertetésére.

5. A sokszögszámok

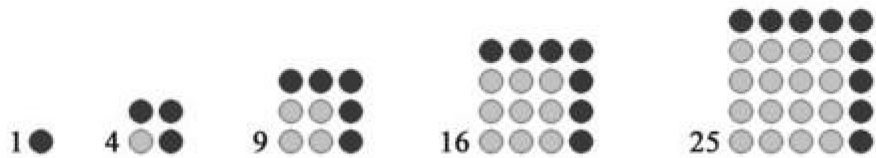
A sokszögszámok közül különös fontossággal rendelkeznek a háromszögszámok, nézzük tehát ezeket.

5. 1. A háromszögszámok

Mivel $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, ezért az n-edik háromszögszám képlete $H_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

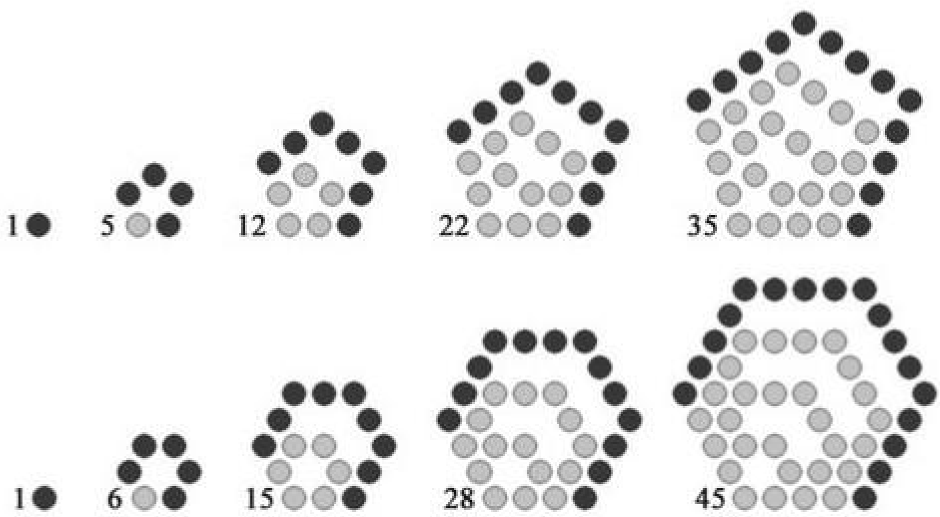
A sokszögszámok közül vitathatatlanul a legfontosabbak és leghasználatosabbak a négyzetszámok, lássuk ezeket.

5. 2. A négyzetszámok



A ma is használatos négyzetszám elnevezés még a pitagoreusoktól származik.
Ugyanakkor a matematikában egy újabb művelet jelent meg, a hatványozás. Jelen esetben $a \times a := a^2$, és az a^2-t négyzetszámnak vagy teljes négyzetnek nevezzük (itt $a \in \mathbb{N}^*$). Az *n*-edik négyzetszám képlete: $N_n = n^2,\ n \in \mathbb{N}^*$.

5.3. Az ötszög és hatszög számok



Megfigyelve ezeket próbáljunk képletet szerkeszteni az n-edik k-szögszámra.

Értelmezés szerint az első *k*-szögszám 1, a második *k*, a harmadik pedig a második *k*-szög határán és belsejében megjelölt pontok száma. Az *n*-edik *k*-szögszám az (*n*+1)-edik szabályos *k*-szög határán és belsejében megjelölt pontok száma. Ha az *n*-edik *k*-szögszámot $S_n(k)$-val jelöljük, akkor $S_n(k)=(k-2)H_n-(k-3)n,$ vagyis $S_n(k)=\frac{1}{2}[(k-2)n^2-(k-4)n]$ ahol $k,n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 3$.

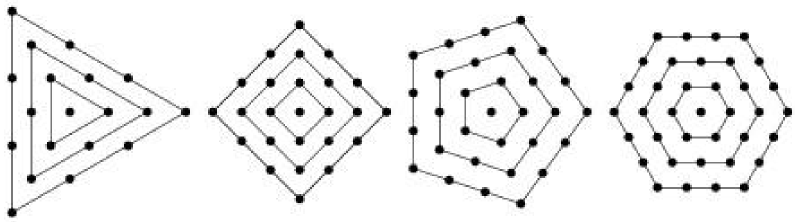
Tehát az n-edik 3-szög szám képlete: $S_n(3)=\frac{1}{2}(n^2+n)=\frac{n(n+1)}{2}$, az n-edik 4-szögszámé $S_n(4)=\frac{1}{2}2n^2=n^2$, az n-edik ötszögszámé $S_n(5)=\frac{1}{2}(3n^2-n)=\frac{n(3n-1)}{2}$, az n-edik hatszögszámé pedig $S_n(6)=\frac{1}{2}(4n^2-2n)=n(2n-1)$ és így tovább.

A sokszögszámoknak van úgynevezett generátor függvényük, amelyekben az együtthatók éppen az illető sokszögszámot jelentik. A $k\in\{3,\ 4,\ 5\ ,\ 6\}$ esetben íme rendre a generátor függvények: $f_3(x)=\frac{x}{(1-x)^3}=x+3x^2+6x^3+10x^4+\ldots$; $f_4(x)=\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}=x+4x^2+9x^3+16x^4+\ldots$
$f_5(x)=\frac{x(2x+1)}{(1-x)^3}=x+5x^2+12x^3+22x^4+\ldots$; $f_6(x)=\frac{x(3x+1)}{(1-x)^3}=x+6x^2+15x^3+28x^4+\ldots$

A k-szög számok további figuratív formái a következők:

6. A középpontos sokszögszámok

Ahogy a nevük is mutatja, a középpontos sokszögszámok egymásba teleszkópikusan behelyezett hasonló szabályos sokszögek, és még a középpont is. Íme néhány típus:



Jelöljük $C_{k,n}$-el a az n-edik középpontos k-szögszámot (a centered= középpontos angol szó alapján). Akkor ennek a képlete: $C_{k,n}=k\cdot H_{n-1}+1=\frac{kn}{2}(n+1)+1$ ugyanis a középpont köré az (n-1)-edik háromszögszámnak k darab példányát helyezzük.

Ennek alapján az ábrán látható középpontos 3, 4, 5, 6 oldalú sokszögszámok képlete: $C_{3,n}=3\frac{n(n-1)}{2}+1$, $C_{4,n}=2n(n-1)+1$, $C_{5,n}=5\frac{n(n-1)}{2}+1$, $C_{6,n}=3n(n-1)+1$. Érdekes kapcsolatok a következők: $C_{6,n}=2C_{6,n-1}-C_{6,n-2}+6$, valamint a $C_{6,n}=3n^2-3n+1=6H_{n-1}+1$, továbbá ha K_n jelöli az n-edik köbszámot (lásd később), akkor mivel $C_{6,n}=3n^2-3n+1=n^3-(n-1)^3=K_n-K_{n-1}$, ezért $\sum_{k=1}^{n}C_{6,k}=n^3=K_n$. (összefoglaló például itt: [1], [2], [3], [4]).

A középpontos sokszögszámoknak is van generátor függvényük, nézzük a $k\in\{3,\ 4,\ 5\ ,\ 6\}$ eseteket:

$g_3(x)=\frac{x^2+x+1}{(1-x)^3}=1+4x+10x^2+19x^3+\ldots$; $g_4(x)=\frac{(x+1)^2}{(1-x)^3}=1+5x+13x^2+25x^3+\ldots$;

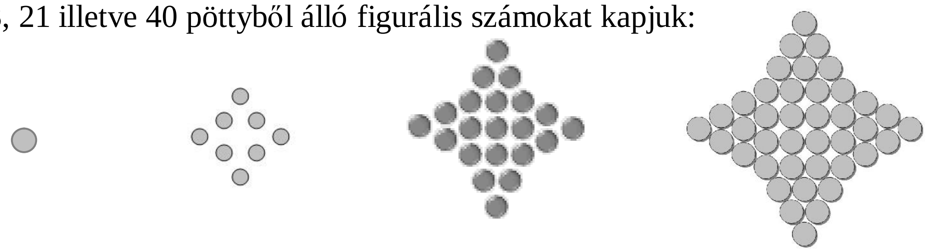
$$g_5(x)=\frac{x^2+3x+1}{(1-x)^3}=1+6x+16x^2+31x^3+\ldots;\; g_6(x)=\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^3}=1+7x+19x^2+37x^3+\ldots$$

Ugyancsak a sokszögszámokkal kapcsolatosak a következők is:

7. A csillagszámok

Ahogy a szabályos konvex sokszögekből csillagsokszögek származtatható, úgy a sokszögszámokból is származtathatók csillag sokszögszámok is. Azonban itt úgy is értelmezhetünk csillagszámokat, hogy egy sokszögszám oldalára kifele háromszögszámokat illesztünk. Két esetet különböztethetünk meg aszerint, hogy a sokszögszám középpontos-e vagy sem.

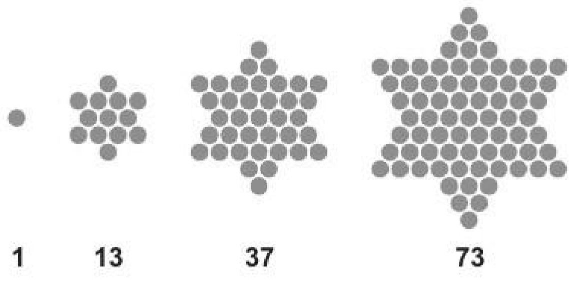
Ha nem középpontos, akkor a legkisebb ilyen sokszögszám amelyre háromszögszámokat illesztve csillagot kapunk éppen a négyzetszám. Illesszünk tehát az N_2 négyzetszám oldalaira kifelé 4 darab H_2 háromszögszámot. Majd illesszünk tehát az N_3 négyzetszám oldalaira kifelé 4 darab H_3 háromszögszámot, és így tovább. Ekkor az alábbi 1, 8, 21 illetve 40 pöttyből álló figurális számokat kapjuk:



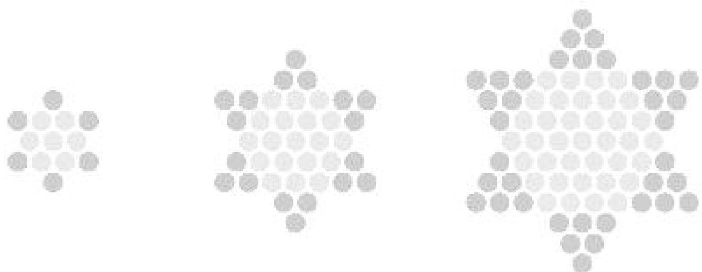
Folytatva az eljárást, az n-edik ilyen figurális szám képlete $n^2+4\frac{n(n-1)}{2}=n(3n-2)$.

A második esetben, amikor a sokszögszám középpontos, nézzük a következőket.

Például a középpontos háromszögszámok oldalaira kifele szintén kongruens háromszögszámokat illesztünk , akkor amennyiben nem háromszögszámot kapunk, csillagszámhoz jutunk:



Könnyen belátható, hogy ezeket a csillagszámokat úgy is tekinthetjük, mintha a középpontos hatszögszám külsejére illesztettünk volna háromszögszámokat:



Éppen ebből kifolyólag a képletkeresés is sokkal könnyebb, ugyanis egy ilyen S_n szám éppen a középpontos hatszögszám, és a külsején 6 darab előző háromszögszám. Képletesen:

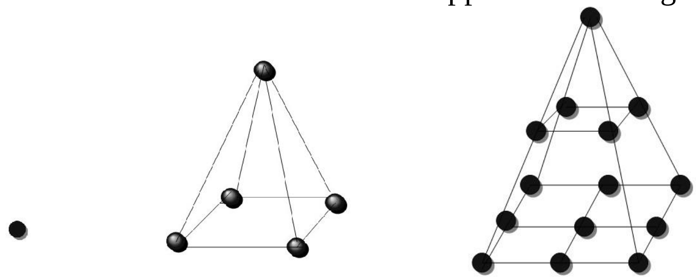
$S_n = C_{6,n} + 6H_{n-1} = 3n^2 - 3n + 1 + 6\frac{n(n-1)}{2} = 6n^2 - 6n + 1$. Érdekes összefüggés a csillagszám, a háromszögszám és a középpontos sokszögszám között: $C_{6,n} \cdot S_n = H_{S_n}$.

Csupán ezen két példa alapján belátható, hogy milyen nagy a csillagszámok szerkesztési lehetőségeinek a száma, hiszen csupán a sokszöget (középpontos sokszöget) kell változtatnunk, ezért tehát megállunk itt.

A továbbiakban rátérünk a figurális számok térbeli reprezentációira.
Először is vegyük a nem szabályos poliéderek esetét:

8. A k-gúla számok

A 3-szög alapú gúlák a tetraéderek, ezeket kihagyjuk, mert a szabályos testek között tárgyaljuk. Következzenek tehát a k= 4 oldalú alappal rendelkező gúlaszámok.



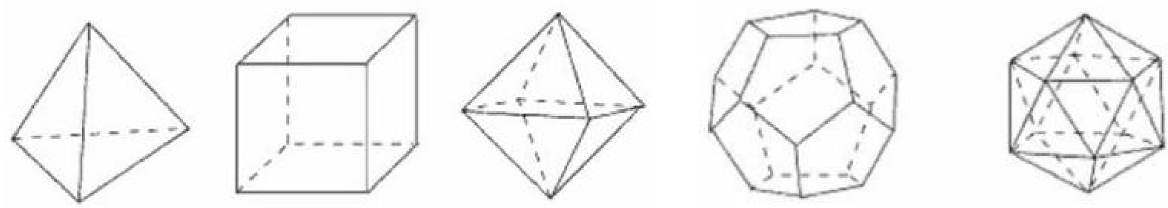
$G_1(4) = 1$ $G_2(4) = 5$ $G_3(4) = 14$

Észrevehető, hogy az n-edik figurális szám képlete: $G_n(4) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

A k> 4 oldalú alap esetén pedig az n-edik k-gúlaszámot jelöljük $G_n(k)$-val. Észrevehető, hogy $G_n(k) = S_1(k) + S_2(k) + ... + S_n(k)$, ahova beírva a k-szögszámoknál levő képleteket, megkapjuk az n-edik k-gúlaszám képletét: $G_n(k) = \frac{n(n+1)}{6}[(k-2)n - k + 5]$; $k, n \in \mathbb{N}^*$ és $k \geq 3$.

9. A poliéderszámok (Plátoni számok, v.ö. [5])

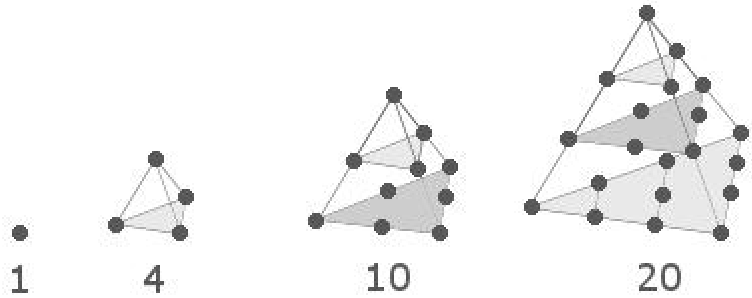
A poliéderszámok a síkbeli szabályos sokszögek alapján szerkesztett sokszögszámoknak a térbeli általánosításai. Míg azonban a síkban tetszőleges oldalszámú sokszög létezik, addig a téren a szabályos térbeli testek száma véges, éspedig a következők:



Tetraéder Hexaéder (Kocka) Oktaéder Dodekaéder Ikozaéder

Nyilvánvalóan, hogy ezekből kiindulva defineáljuk a térbeli poliéderszámokat. A háromszögszámoknak a térbeli analógjai a tetraéderszámok, kezdjük ezekkel.

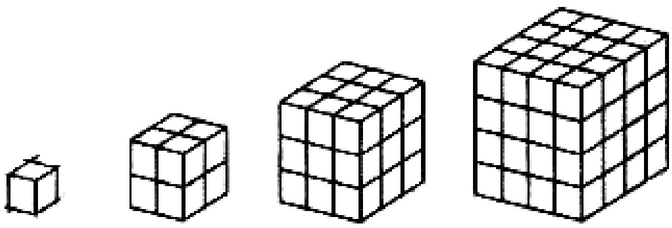
9. 1. A tetraéderszámok.



Észrevehető, hogy $t_1 = H_1$, $t_2 = H_1+H_2$, $t_3 = H_1+H_2+H_3$, és így tovább. Az n-edik tetraéderszám képlete: $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

.

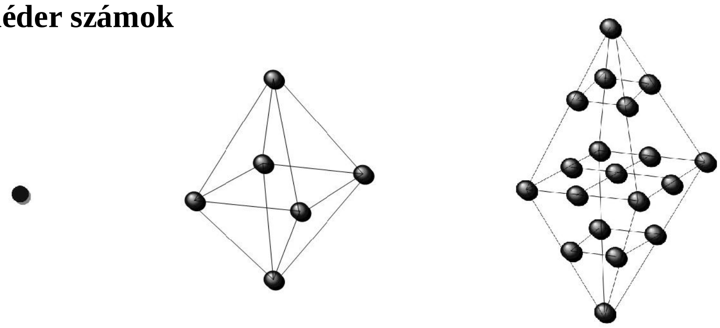
9.2. A köbszámok



$K_1 = 1$ $K_2 = 8$ $K_3 = 27$ $K_4 = 64$

A köbszámok a négyzetszámoknak a térbeli megfelelőjük. A figurális számokból ered a köbszám elnevezés is, így tovább bővül a hatványozás: $a \times a \times a =: a^3$, ahol a^3-t köbszámnak nevezzük (esetünkben $a \in \mathbb{N}^*$). Az n-edik köbszám képlete: $K_n = n^3,\ n \in \mathbb{N}^*$.

9.3. Az oktaéder számok



$O_1 = 1$ $O_2 = 6$ $O_3 = 19$

Észrevehető, hogy a képletének megadása érdekében a következő számolásokat kell elvégeznünk:

$$O_n = 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2) + n^2 = 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{n\cdot(2n^2+1)}{3},\ n \in \mathbb{N}^*$$

9.3-9.4. A dodekaéder és az ikozaéder számok

Ezeknek a számoknak a térbeli reprezentációjuk már eléggé bonyolultak ahhoz, hogy ábrázolhassuk őket. Ezért csupán a két számtípus képletét adjuk meg.

$$D_n = \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6} \qquad \text{illetve} \qquad I_n = \frac{n(5n^2-5n+2)}{2} \quad \text{(v.ö. [5])}$$

A térbeli poliéder számok is lehetnek középpontos figuratív számok is, továbbá a síkbeli sokszögszámok mintájára, a poliéder számoknak is van generátor függvényük is.

A két és háromdimenziós figuratív számokat tovább lehet általánosítani ha a dimenziószámot növeljük. Így például a síkbeli háromszögszám és a térbeli tetraéderszám 4D-s általánosítása a pentatóp számok, amelyek sajátos politóp számok.

Az n-edik pentatóp szám képlete: $P_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} = C_n^4$, vagyis éppen az ötödik binomiális együttható. Ezek szerint az n-edik „k-dimenziós tetraéderszám” (k-szimplex) képlete éppen $P_{k,n} = C_n^k$ lesz.

Forrásanyag:

[1] http://oeis.org/wiki/Centered_polygonal_numbers
[2] http://www.virtuescience.com/centered-polygonal.html
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Centered_number
[4] http://mathworld.wolfram.com/CenteredPolygonalNumber.html
[5] http://oeis.org/wiki/Platonic_numbers
[6] http://mathworld.wolfram.com/FigurateNumber.html
[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Figurate_numbers
[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Figurate_number
[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_number
[10] http://mathworld.wolfram.com/FigurateNumber.html
[11] http://oeis.org/wiki/User:Peter_Luschny/FigurateNumber
[12] http://www.whatabeginning.com/ASPECTS/ASPECTS_FN.htm
[13] http://bbs.sachina.pku.edu.cn/stat/math_world/math/f/f132.htm
[14] http://www.biblewheel.com/GR/GR_Figurate.php
[15] [3] Tuzson Zoltán: Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat, Ábel kiadó, Kolozsvár, 2011