Tuzson Zoltán

A pitagoraszi tételcsoport analógja, és általánosításának az analógja a tetraéderben

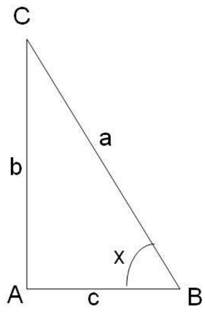
Az [1]- ben a következőkről olvashatunk: Ha $ABCD$ egy D-ben derékszögű tetraéder, és az oldallapok területei $t_A = t(BCD)$, $t_B = t(DAC)$, $t_C = t(ABD)$, $t_D = t(ABC)$, akkor érvényes a $t_D^2 = t_A^2 + t_B^2 + t_C^2$ ami nem más, mint a Pitagorasz-tételnek a térbeli analógja a derékszögű tetraéder esetén. Ezt először Jean Paul de Gua de Malves bizonyította 1783-ban, így a Gua-féle tételnek nevezik (v.ö. [2]). Ezt szeretnénk más szemszögből is megvilágítani. A továbbiakban legyenek rendre *a*, *b*, *c* egy *ABC* háromszög megfelelő oldalainak a hossza, *A*, *B*, *C* a megfelelő szögeinek a mértékszáma, $\widehat{A} = 90°$ és x valamelyik hegyesszögének a mértékszáma. Ekkor:

1. Tétel: A következő három kijelentés egyenértékű:

a) $a^2 = b^2 + c^2$ b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

c) $\cos^2 B + \cos^2 C = 1$.

Bizonyítás:



1. ábra

A bizonyítás azonnali, mert $b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Továbbá ha $x \in \{B, C\}$ akkor, mivel $\sin B = \cos C$, illetve $\sin C = \cos B$, ezért $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 B + \cos^2 C = 1$.

Most bizonyítani fogjuk, hogy az 1. Tétel c) formájának is van analógja a tetraéderben.

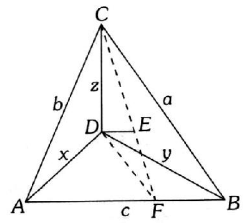
2. Tétel: Egy $ABCD$, D-ben derékszögű tetraéderben igaz, hogy:

$\cos^2 \widehat{AB} + \cos^2 \widehat{BC} + \cos^2 \widehat{CA} = 1$ ahol $\widehat{XY}$ az XY élhez tartozó tetraéderbeli lapszög mértékét jelöli.

Bizonyítás: Az 1. ábra jelöléseit használva felírható, hogy $\sin x = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ (i), valamint $\cos x = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ (ii). Ha $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a Pitagorasz-tétel egy más alakja, és a Pitagorasz-tétel analógja érvényes a derékszögű tetraéderben is, akkor mi lenne ennek a formulának az analógja a derékszögű tetraéderben? Szem előtt tartva az (i), (ii) összefüggéseket és a $t_D^2 = t_A^2 + t_B^2 + t_C^2$ analóg Pitagorasz-tételt, ésszerűnek tűnik, hogy defineáljuk a következő törteket: $a(t) = \frac{t_A}{\sqrt{t_A^2 + t_B^2 + t_C^2}}$,

$$b(t) = \frac{t_B}{\sqrt{t_A^2 + t_B^2 + t_C^2}},\ c(t) = \frac{t_C}{\sqrt{t_A^2 + t_B^2 + t_C^2}}.$$

Az analóg Pitagorasz-tétel értelmében nyilvánvaló, hogy $a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) = 1$ Nézzük csak most az $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ jelentéseit.



2. ábra

A 2. ábrát követve felírható, hogy $\cos\widehat{AB} = \frac{DF}{CF}$ ahol $DF = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ és $CF = \frac{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, és ezek szerint $\cos\widehat{AB} = \frac{xy}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}} =$

$= \frac{t_C}{\sqrt{t_A^2+t_B^2+t_C^2}} = c(t)$. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $b(t) = \frac{t_B}{\sqrt{t_A^2+t_B^2+t_C^2}} = \cos\widehat{CA}$, és $a(t) = \frac{t_A}{\sqrt{t_A^2+t_B^2+t_C^2}} = \cos\widehat{BC}$. Ezek alapján tehát az analóg Pitagorasz-tétel trigonometriai alakja a következő:

$\cos^2\widehat{AB} + \cos^2\widehat{BC} + \cos^2\widehat{CA} = 1$.

Ugyancsak az [1]-ben olvashatunk a magasságtétel analógjáról is, de azt is olvashatjuk, hogy az analóg forma csak speciális derékszögű tetraéderben teljesül.

A továbbiakban a magasságtétel egy ekvivalens alakjának az analógját keressük meg és igazoljuk, hogy ez minden derékszögű tetraéderben igaz.

3. Tétel: A következő három kijelentés egyenértékű:

a) $m^2 = p\cdot q$ b) $m = \frac{b\cdot c}{a}$ c) $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{m^2}$

ahol m az A-ból húzott magasság, p a c befogó vetülete az a átfogóra, q pedig a b befogó vetülete az a átfogóra.

Bizonyítás: $m^2 = p\cdot q \Leftrightarrow m^2 = \frac{b^2}{a}\cdot\frac{c^2}{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = \frac{b\cdot c}{a}$. Továbbá $m = \frac{b\cdot c}{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2\cdot c^2} = \frac{1}{m^2} \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2}{b^2\cdot c^2} = \frac{1}{m^2} \Leftrightarrow$

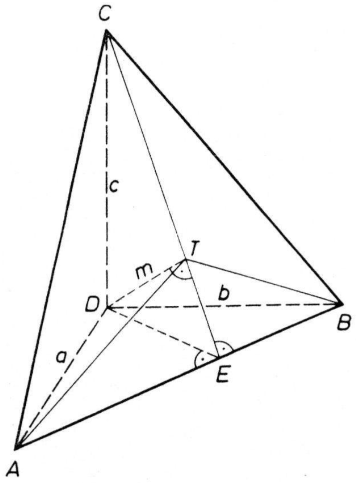
$\Leftrightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{m^2}$. A továbbiakban igazoljuk, hogy a 3. Tétel c) formájának is van analógja a tetraéderben.

4. Tétel: Egy $ABCD$, D-ben derékszögű tetraéderben igaz, hogy:

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{m^2}$

ahol $a=AD$, $b=BD$, $c=CD$ ás m a D pont távolsága az ABC síktól.

Bizonyítás:



3. ábra

Az ábra jelöléseit követve, mivel $DT \perp AB$, $CD \perp AB$, ezért $DE \perp AB$. Ha a síkbeli analóg tételt (3. Tétel c)) alkalmazzuk az ABD és ECD derékszögű háromszögekre, akkor felírható, hogy: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{DE^2}$ és $\frac{1}{DE^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{m^2}$, ahonnan kiküszöbölve az $\frac{1}{DE^2}$-et, éppen $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{m^2}$ adódik.

Következzen most a Pitagorasz-tétel általánosítása, és ennek analógja az általános tetraéderben.

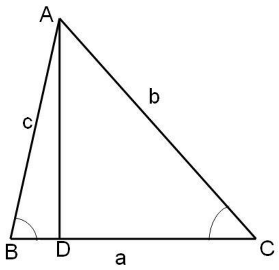
A Pitagorasz-tétel általánosítása nem derékszögű háromszögekre a következő: ha az ABC általános háromszög megfelelő oldalainak a hosszát a, b, illetve c-vel, a megfelelő szögeinek a mértékét A, B, C-vel jelöljük, akkor igaz, hogy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos A \quad (1’)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\cdot c\cdot a\cdot\cos B \quad (2’)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos C \quad (3’).$$

A tételt még koszinusztételnek is nevezik, és egyik legegyszerűbb bizonyítása az úgynevezett vetületek-tételével történik, miszerint:

$$a = b\cdot\cos C + c\cdot\cos B \quad (1”)$$
$$b = c\cdot\cos A + a\cdot\cos C \quad (2”)$$
$$c = a\cdot\cos B + b\cdot\cos A \quad (3”)$$

A bizonyítása azonnali:



4. ábra

mivel $BD = c \cdot \cos B$ és $DC = b \cdot \cos C$ továbbá a *BD* és *DC* vetületekre érvényes, hogy *BD*+ *DC*= *a*, ezért máris az (1”) összefüggés adódik.

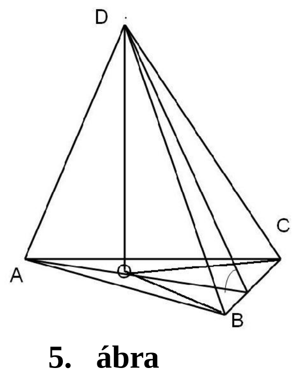
A koszinusztétel bizonyítása pedig így történik: szorozzuk meg az (1”)-et *a*-val, a (2”)-et *b*-vel és a (3”)-et *c*-vel. Ezután felírjuk, hogy:

$$a^2 - b^2 - c^2 = \left(ab\cos C + ac\cos B\right) -$$

$$-\left(bc\cos A + ab\cos C\right) - \left(ac\cos B + bc\cos C\right) =$$

$= -2bc\cos A$ vagyis az (1’) bizonyított.

A továbbiakban az általánosított Pitagorasz-tételt fogjuk analógiával kiterjeszteni az általános tetraéderben. Ebből a célból, akár csak az előbb is, hamarabb a vetületek-tételét bizonyítjuk a tetraéderben is. Legyen tehát *ABCD* egy általános tetraéder, és *O* a *D* pontnak a vetülete az *ABC* síkra.



5. ábra

Jelölje $\widehat{XY}$ az *XY* élhez tartozó tetraéderbeli lapszög mértékét. Akkor bizonyítható a következő eredmény:

5. Tétel (vetületek tétele a tetraéderben)

Ha $t_A = t(BCD)$, $t_B = t(DAC)$, $t_C = t(ABD)$, $t_D = t(ABC)$, akkor

$$t_A = t_B \cdot \cos\widehat{CD} + t_C \cdot \cos\widehat{BD} + t_D \cdot \cos\widehat{BC} \quad (1)$$

$$t_B = t_A \cdot \cos\widehat{CD} + t_C \cdot \cos\widehat{AD} + t_D \cdot \cos\widehat{AC} \quad (2)$$

$$t_C = t_A \cdot \cos\widehat{BD} + t_B \cdot \cos\widehat{AD} + t_D \cdot \cos\widehat{AB} \quad (3)$$

$$t_D = t_A \cdot \cos\widehat{BC} + t_B \cdot \cos\widehat{AC} + t_C \cdot \cos\widehat{AB} \quad (4)$$

Bizonyítás: Az 5. ábrát követve felírható, hogy $t(OBC) = t(DBC)\cdot\cos\widehat{BC}$ vagyis $t(OBC) = t_A \cdot \cos\widehat{BC}$ és hasonlóan $t(OCA) = t_B \cdot \cos\widehat{AC}$, $t(OAB) = t_C \cdot \cos\widehat{AB}$

Tehát most a síkbeli *BD* és *DC* vetületek helyett az analóg $t(OAB)$, $t(OBC)$, és $t(OCA)$ vetület- területeket használjuk. És mivel felírható, hogy $t_D = t(ABC) = t(OAB) + t(OBC) + t(OCA)$

Ezért máris megkaptuk a (4)-es összefüggést. Teljesen hasonlóan bizonyítható a másik három összefüggés is.

Ezek után, a síkbeli koszinusztételnek a bizonyításának a mintájára bizonyítjuk a következőket:

6. Tétel (koszinusztétel a tetraéderben)

Egy *ABCD* általános tetraéderben, az előző jelöléseket használva igaz, hogy:

$$t_A^2 = t_B^2 + t_C^2 + t_D^2 - 2t_Bt_C\cos\widehat{AD} - 2t_Bt_D\cos\widehat{AC} -$$

$$-2t_Ct_D\cos\widehat{AB} \quad (1.1)$$

$$t_B^2 = t_C^2 + t_D^2 + t_A^2 - 2t_Ct_D\cos\widehat{AB} - 2t_At_C\cos\widehat{BD} -$$

$$-2t_Dt_A\cos\widehat{BC} \quad (1.2)$$

$$t_C^2 = t_D^2 + t_A^2 + t_B^2 - 2t_Dt_A\cos\widehat{BC} - 2t_Dt_B\cos\widehat{AC} -$$

$$-2t_At_B\cos\widehat{BC} \quad (1.3)$$

$$t_D^2 = t_A^2 + t_B^2 + t_C^2 - 2t_At_B\cos\widehat{CD} - 2t_At_C\cos\widehat{BD} -$$

$$-2t_At_B\cos\widehat{AD} \quad (1.4)$$

Bizonyítás: A vetülettételben az (1)-et t_A-val, a (2)-t $-t_B$-vel, a (3)-at $-t_C$-vel, a (4)-et pedig $-t_D$-vel szorozva és a megfelelő oldalakat tagonként összeadva, éppen az (1.) összefüggést kapjuk. Teljesen hasonlóan bizonyítjuk a másik három összefüggést is.

Belátható, hogy ha az *ABCD* tetraéder derékszögű a *D*-ben, akkor $\cos\widehat{AD} = \cos\widehat{BD} = \cos\widehat{CD} = 0$ és akkor az előbbi (1.4) összefüggés így alakul:

$$t_D^2 = t_A^2 + t_B^2 + t_C^2$$

és ez nem más, mint a Pitagorasz-tétel analógja a derékszögű tetraéder esetén, amit az [1]- ben is és a [4]-ben is megtalálunk, és ezúttal általánosítottunk.

Irodalom

[1] Dr. DarvasiGyula: Az analóg pitagoraszi tételcsoport, MaTa 1/2010, 3.-5. old

[2]http://en.wikipedia.org/wiki/De_Gua's_theorem

[3] Dan Branzei és társai: Planul si spatiul Euclidian, Editura Academiei RSR, Bucuresti, 1986

[4] Fitos László: Analóg tételek és feladatok a sík- és térgeometriában, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.