A fogótétel alkalmazása sorozatok határértékének kiszámolására

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Minden bizonnyal nincs más olyan matematikai tétel amelynek olyan sok megnevezése lenne, mint az úgynevezett fogótételnek, amelynek gyakoribb megnevezései: rendőrelv, csendőrelv, zsarutétel, zsandárszabály, közrefogási elv, szendvicstétel. Ez a tétel sorozatokra és függvényekre is egyaránt létezik, és ezt feladatmegoldási módszerként is alkalmazzuk, amire a matematikai analízisben nagy szükségünk van.

Előbb ismertetjük tehát a sorozatokra vonatkozó fogótételt és következményeit:

1. Tétel: Legyenek $(a_n)_{n\geq 1},(b_n)_{n\geq 1},(c_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozatok úgy, hogy az $(a_n)_{n\geq 1},(c_n)_{n\geq 1}$ sorozatok konvergensek, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = x$, $x \in \overline{R}$ és $a_n \leq b_n \leq c_n$. Akkor a $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat is konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$ is igaz.

Bizonyítás: Az ε-os konvergencia kritériumot használva, $\forall \varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan n_a és n_c küszöbindexek, hogy bármely $n > \max(n_a, n_c)$ esetén $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{3}$ és $|c_n - x| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor, a háromszög egyenlőtlensége alapján

$$|b_n - x| = |b_n - c_n + c_n - x| \leq |b_n - c_n| + |c_n - x| < (c_n - b_n) + \frac{\varepsilon}{3} < (c_n - a_n) + \frac{\varepsilon}{3} < |c_n - x| + |a_n - x| + \frac{\varepsilon}{3} < 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ami éppen azt jelenti, hogy a $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat is konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$ is igaz.

1. Következmény (majorálás a ∞-re): Legyenek $(a_n)_{n\geq 1},(b_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozatok úgy, hogy $a_n \leq b_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és. Akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ is igaz.

2. Következmény (minorálás a 0-ra): Legyenek $(b_n)_{n\geq 1},(c_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozatok úgy, hogy $0 < b_n \leq c_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Akkor a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ is igaz.

Az előbbi tételnek a rendőrelv és a többi elnevezései a következő hasonlatból kapták a nevüket: ***Ha 2 rendőr közrefog egy tolvajt, és ha a 2 rendőr a rendőrőrsre megy világos, hogy a tolvajnak is velük együtt ugyan oda kell mennie.*** Ebből kifolyólag a továbbiakban mi is a rendőrelv elnevezést fogjuk használni.

A továbbiakban számos reprezentatív, sokszínű és változatos feladaton keresztül szemléltetni fogjuk a rendőrelv és következményeinek az alkalmazási módszereit.

1. feladat: Számítsuk ki az $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n + \sin 2n}{3n + \sin 3n}$ határértéket!

Megoldás: Az erőltetett tényező módszerét alkalmazva felírható, hogy $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(2 + \frac{\sin 2n}{n}\right)}{n\left(3 + \frac{\sin 3n}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{\sin 2n}{n}}{3 + \frac{\sin 3n}{n}}$, de a 0-ra való minorálás alapján $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\sin 2n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$, és $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\sin 3n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$, de mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 2n}{n} = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 3n}{n} = 0$, így $L = \frac{2}{3}$.

2. feladat: Számítsuk ki az $L = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ határértéket.

Megoldás: Nyilvánvalóan $1 \leq \sqrt[n]{n}$, továbbá legyen $\sqrt[n]{n} - 1 = a_n$, tehát $0 \leq a_n$, és $\sqrt[n]{n} = a_n + 1$, ezért a binomképlet alapján $n = (1 + a_n)^n = 1 + n\cdot a_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + ... + a_n^n$, tehát $n > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$.

Tehát $0 \le \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, és mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$, ezért a rendőrelv alapján *L=1.*

3. feladat: Számítsuk ki az $L = \frac{n!}{2^n}$ határértéket.

Megoldás: Írjuk fel rendre a következőket:

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{2}\right) > \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$ és mivel

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = +\infty$, ezért a ∞-re való majorálás alapján $L = +\infty$.

4. feladat: Számítsuk ki az $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(1+1^{1+k})(1+2^{2+k})\ldots(1+n^{1+k})}$ határértéket, ha *k >0.*

Megoldás: Felírható, hogy

$$0 < \frac{n!}{(1+1^{1+k})(1+2^{2+k})\ldots(1+n^{1+k})} < \frac{n!}{1^{1+k}\cdot 2^{2+k}\cdot\ldots\cdot n^{1+k}} = \frac{n!}{(n!)^{1+k}} = \frac{1}{(n!)^k}$$, de mivel *k >0*, ezért

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n!)^k} = 0$, így a 0-ra való minorálás alapján *L*= 0.

5. feladat: Számítsuk ki az $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^k + 2^k + \ldots + n^k}$ határértéket, ha *k >0.*

Megoldás: Rendre felírható, hogy: $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n\cdot 1^k} < \sqrt[n]{1^k + 2^k + \ldots + n^k} < \sqrt[n]{n^k} = (\sqrt[n]{n})^k$. És mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^k = 1$, ezért a rendőrelv alapján *L*= *1.*

6. feladat: Számítsuk ki az $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 2\cdot 4^n + 3\cdot 7^n}$ határértéket.

Megoldás: Rendre felírható, hogy:

$7 = \sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{3^n + 5^n + 2\cdot 4^n + 3\cdot 7^n} < \sqrt[n]{7^n + 7^n + 2\cdot 7^n + 3\cdot 7^n} = \sqrt[n]{7\cdot 7^n} = 7\sqrt[n]{7}$, és mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} = 1$, ezért a rendőrelv alapján *L*= *7.*

7. feladat: Számítsuk ki az $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n^2+n}\right\}$ határértéket, ha $\{x\}$ az *x* valós szám törtrészét jelenti.

Megoldás: Minden valós *x* szám esetén $x = [x] + \{x\}$, ahol $[x]$ az *x* valós szám egész részét jelenti. Tehát $\{x\} = x - [x]$, ezért $x_n = \left\{\sqrt{n^2+n}\right\} = \sqrt{n^2+n} - \left[\sqrt{n^2+n}\right]$. De

$n = \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+n} < \sqrt{(n+1)^2} = n+1$, ha $n \ge 2$, ezért $\left[\sqrt{n^2+n}\right] = n$, tehát

$x_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$, és mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{2}$, ezért $L = \frac{1}{2}$.

8. feladat: Számítsuk ki az $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{[1^2\cdot x] + [2^2\cdot x] + \ldots + [n^2\cdot x]}{n^3}$, ha $[x]$ az *x* valós szám egész részét jelenti, és $x \ne 0$.

Megoldás: Az egészrészre érvényes a következő dupla egyenlőtlenség: $a - 1 < [a] \le a$, ezért

$$y_n = [1^2\cdot x] + [2^2\cdot x] + \ldots + [n^2\cdot x] > 1^2\cdot x + 2^2\cdot x + \ldots + n^2\cdot x - n = x\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} - n = x_n$$

illetve $y_n = \left[1^2 \cdot x\right] + \left[2^2 \cdot x\right] + ... + \left[n^2 \cdot x\right] \le 1^2 \cdot x + 2^2 \cdot x + ... + n^2 \cdot x = x \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = z_n$.

Tehát a fogótétel alapján, mivel $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} x \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6 \cdot n^3} = \frac{x}{6}$, ezért $L = \frac{x}{6}$.

9. feladat: Ha $e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$, számítsuk ki az $L = \lim_{n\to\infty} e_n$ határértéket.

Megoldás: A Newton binomiális képlete alapján felírható, hogy:

$S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot ... \cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$. De $\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot ... \cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} < \frac{1}{k!}$,

ezért $S_n \le e_n$ (1). Másfelől ha az összegben rögzítjük a k-t és megőrizzük csak az első *(k+1)* tagot felírható, hogy $S_{n_k} = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot ... \cdot\left(1-\frac{i-1}{n}\right)}{i!} < S_n < e$. Tehát

$\lim_{n\to\infty} S_{n_k} = e_k < e_n \quad \forall k \in N^*$, ezért $\lim_{k\to\infty} e_k \le e$ (2). De az (1) alapján $e = \lim_{n\to\infty} S_n \le e_n$, így a rendőrelv értelmében $\lim_{n\to\infty} e_n = e$.

10. feladat: Igazoljuk, hogy a $h_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ általános tagú ú.n. harmonikus sorozat divergens!

Megoldás: Belátható, hogy minden n pozitív egész számra létezik olyan $k = k(n) < n$ szám amelyre $h_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^k} = x_k$. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $x_k > 1 + \frac{k}{2}$ (*).

Valóban, ha feltételezzük, hogy (*) igaz, akkor $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + ... + \frac{1}{2^k+2^k} >$

$> 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + ... + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \frac{k}{2} + \frac{2^k}{2^{k+1}} = 1 + \frac{k+1}{2}$. Most a (*) alapján kapjuk, hogy $\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$, a végtelenre való majorálás alapján következik, hogy $\lim_{n\to\infty} h_n = +\infty$.

11. feladat: Igazoljuk, hogy ha $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$, akkor $L = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Megoldás: A feladatra egy teljesen elemi megoldás a következő: a matematikai indukció módszerével (hosszabb számolásokkal) igazolható a következő dupla egyenlőtlenség:

$n\frac{2n-1}{3} < \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{2\pi}\right)^2 + ... + \left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^2 < n\frac{2n+2}{3}$. Az egyenlőtlenséglánc alapján

$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right) < x_n < \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$, ezért a rendőrelv alapján valóban $L = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi^2}{6}$.

12. feladat: Ha $b_n = \frac{\sin 1}{n^2+1} + \frac{\sin 2}{n^2+2} + ... + \frac{\sin n}{n^2+n}$, számítsuk ki az $L = \lim_{n\to\infty} b_n$ határértéket.

Megoldás: A háromszög egyenlőtlensége alapján felírható, hogy:

$|b_n| \le \left|\frac{\sin 1}{n^2+1}\right| + \left|\frac{\sin 2}{n^2+2}\right| + ... + \left|\frac{\sin n}{n^2+n}\right| \le \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + ... + \frac{1}{n^2+n} < n\frac{1}{n^2+1}$ és mivel

$\lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n^2+1} = 0$, ezért a 0-ra minorálás alapján $L = 0$.

13. feladat: Ha $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, számítsuk ki az $L = \lim_{n\to\infty} b_n$ határértéket.

Megoldás: Felírható, hogy: $b_n > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = a_n$,

és $b_n < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = c_n$. Ezért, mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$, a rendőrelv értelmében $L = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

14. feladat: Ha $b_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right) + ... + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$, számítsuk ki az $L = \lim_{n\to\infty} b_n$ határértéket.

Megoldás: Felírható, hogy

$b_n > \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) + ... + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)^n = a_n$ és

$b_n < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) + ... + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n = c_n$. Ezért mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = e$, a rendőrelv alapján $L = \lim_{n\to\infty} b_n = e$.

15. feladat: Ha $b_n = \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}$, számítsuk ki az $L = \lim_{n\to\infty} b_n$ határértéket.

Megoldás: Belátható, hogy $\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, és ebben az intervallumban a sinus függvény szigorúan növekvő, ezért: $b_n > \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} + \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} + ... + \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} = n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} = a_n$

és $b_n < \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + ... + \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = c_n$. Ezért mivel $\lim_{x_n\to 0} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$, így $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \pi$, a rendőrelv alapján $L = \lim_{n\to\infty} b_n = \pi$.

16. feladat: Ha $b_n = \frac{1+1^2}{n^3+1} + \frac{2+2^2}{n^3+2} + ... + \frac{n+n^2}{n^3+n}$, számítsuk ki az $L = \lim_{n\to\infty} b_n$ határértéket.

Megoldás: Felírható, hogy: $b_n > \frac{1+1^2}{n^3+n} + \frac{2+2^2}{n^3+n} + ... + \frac{n+n^2}{n^3+n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+n} = a_n$

és $b_n < \frac{1+1^2}{n^3+1} + \frac{2+2^2}{n^3+1} + ... + \frac{n+n^2}{n^3+1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+1} = c_n$, ezért mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}$, a rendőrelv értelmében $L = \frac{1}{3}$.

17. feladat: Ha $b_n = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} - ... - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$, számítsuk ki az $L = \lim_{n\to\infty} b_n$ határértéket.

Megoldás: Észrevehető, hogy a 12. feladat értelmében $\infty \cdot 0$ határozatlan esettel állunk szembe. Mivel

$$b_n = n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+k}-n}{\sqrt{n^2+k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}\,(\sqrt{n^2+k}+n)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}}$$

Ezért felírható, hogy

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}} > \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+n\sqrt{n^2+n}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+n\sqrt{n^2+n}} = a_n,$$ valamint az, hogy

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k+n\sqrt{n^2+k}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1+n\sqrt{n^2+1}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1+n\sqrt{n^2+1}} = c_n.$$ Ezért, mivel

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{4}$, a rendőrelv értelmében $L = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{4}$.

18. feladat: Ha $b_n = \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+3}{n+4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+2n-1}{n+2n}$, számítsuk ki az $L = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ határértéket.

Megoldás: felírható, hogy:

$$b_n^2 = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}\cdot\frac{(n+3)(n+5)}{(n+4)^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+2n-3)(n+2n-1)}{(n+2n-2)^2}\cdot\frac{(n+1)(3n-1)}{(3n)^2}.$$ Mivel

$\frac{(n+2k-3)(n+2k-1)}{(n+2k-2)^2} < 1$ minden $k \in \{1, 2, \ldots n\}$ esetén, ezért $b_n^2 < \frac{(n+1)(3n-1)}{(3n)^2} = c_n^2$ (1).

Másfelől $b_n^2 = \frac{(n+3)^2}{(n+2)(n+4)}\cdot\frac{(n+5)^2}{(n+4)(n+6)}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+2n-1)^2}{(n+2n-2)(n+2n)}\cdot\frac{(n+1)^2}{3n(n+2)}$, és mivel

$\frac{(n+2k-1)^2}{(n+2k-2)(n+2k)} > 1$ minden $k \in \{1, 2, \ldots n\}$ esetén, ezért $b_n^2 > \frac{(n+1)^2}{3n(n+2)} = a_n^2$ (2). Az (1) és (2) alapján, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ezért a rendőrelv értelmében $L = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

19. feladat: Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ olyan pozitív valós számsorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Továbbá, ha $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ igazoljuk, hogy

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} G_n = \lim\limits_{n\to\infty} H_n$.

Megoldás: Ismert a számtani, mértani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséglánc: $A_n \leq G_n \leq H_n$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} G_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} H_n$. Továbbá a Stolz-Cesaro lemma alapján

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1)-n} = a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{a_{n+1}}} = a$, ezért a rendőrelv alapján $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = a$.

Az eddigiekben megoldott feladatok esetén, a rendőrelvben szereplő a_n és b_n megválasztása nem okozott különös nehézséget. Ellenben számos olyan feladat van, ahol ezek megválasztása egyáltalán nem magától értetődő, vagyis bizonyos előismeretekre van szükségünk. Egy lehetőség az a_n és b_n és megállapítására adott függvények tanulmányozásából adódik, és ennek keretén belül kiemelt helyet foglal a Lagrange-tétel alkalmazása. Nézzünk néhány ilyen alkalmazást.

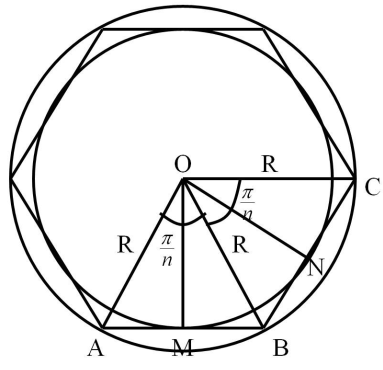
20. feladat: Ha $b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$, számítsuk ki az $L = \lim_{n\to\infty} b_n$ határértéket.
Megoldás: Tekintsük az $f:[k+1,k] \to R,\ f(x) = \ln x$ függvényt. A Lagrange tétele értelmében létezik olyan $c_k \in (k, k+1)$ szám amelyre $\ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c_k}$, ahonnan felírható, hogy $\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$. Ha most összegezzük ezeket az egyenlőtlenségeket minden $k \in \{n, n+1, ..., 2n\}$ azt kapjuk, hogy $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=n}^{2n} (\ln(k+1) - \ln k) < \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ (*) vagyis $b_n + \frac{1}{2n+1} < \ln 2n - \ln n < b_n + \frac{1}{n}$, tehát $\ln 2 - \frac{1}{n} < b_n < \ln 2 - \frac{1}{2n+1}$, ahonnan a rendőrelv értelmében $L = \lim_{n\to\infty} b_n = \ln 2$ adódik.

Megjegyzések: 1) Az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$ azonosság alapján, $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$ is igaz.
2) Ha az előbbi (*) összegzést csak $k \in \{1, 2, ...n\}$ esetén végeztük volna el, akkor a jobboldali egyenlőtlenségből azt kaptuk volna, hogy $h_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$ ahonnan $\lim_{n\to\infty} h_n = +\infty$ adódna, ami egy másik bizonyítás a 10. feladatra.

21. feladat: Ha $b_n = n\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$, számítsuk ki az $L = \lim_{n\to\infty} b_n$ határértéket..

Megoldás: Ismert a következő dupla egyenlőtlenség: $\frac{e}{2n+2} < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}$ (v.ö. [1])
A bizonyítása végett tekintsük a következő függvényeket: $f(x) = x + x\ln\left(\frac{2+x}{2+2x}\right) - \ln(1+x)$, és $g(x) = ln(1+x) - x - xln\frac{2}{2+x}$, $f, g : (0,1) \to R$. Számolásokkal ellenőrizhető, hogy f’(x) és g’(x) szigorúan növekvőek a (0,1) intervallumon, ahonnan $f'(x) > f'(0) = 0$, $f(x) > f(0) = 0$, $g'(x) > g'(0) = 0$, $g(x) > g(0) = 0$ és az $x = \frac{1}{n}$ választással a dupla egyenlőtlenség adódik. Ennek alapján kapjuk, hogy:
$\lim_{n\to\infty} \frac{en}{2n+2} \le \lim_{n\to\infty} n\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{en}{2n+1}$, és a rendőrelv alapján $L = \frac{e}{2}$.

22. feladat: Vezessük le az R sugarú kör kerületszámolási képletét.
Megoldás: A kör kerületét szabályos n-sokszögek kerületével közelítjük meg (ezt nevezik a kör sokszögesítésének) többlettel, és hiánnyal. A mellékelt ábra jelölései alapján $AB = 2R \cdot \sin\frac{\pi}{n}$, így a köréírt n-oldalú szabályos sokszög kerülete $K_n = n \cdot AB = 2R \cdot n \cdot \sin\frac{\pi}{n}$. Továbbá $BC = 2R \cdot tg\frac{\pi}{n}$, így a beírt n-oldalú szabályos sokszög kerülete $k_n = n \cdot BC = 2R \cdot n \cdot tg\frac{\pi}{n}$. Ha K

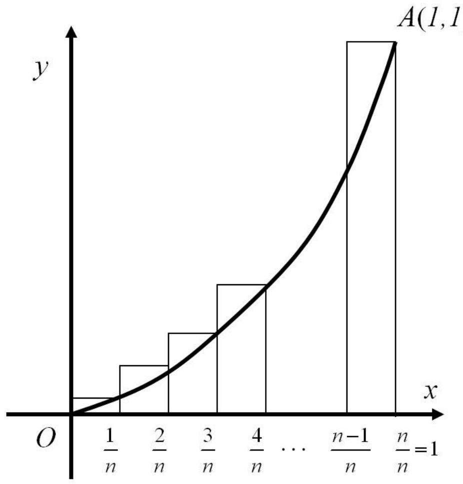


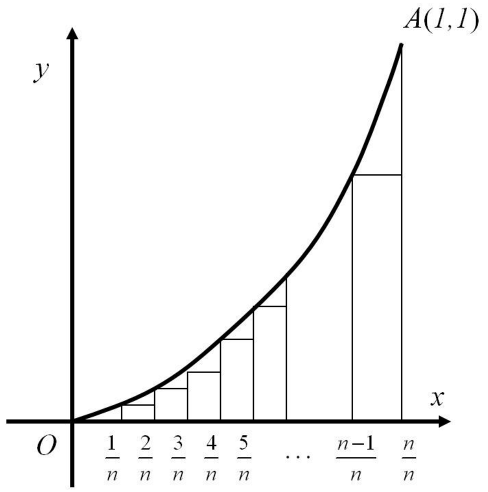
a kör kerülete, akkor $k_n < K < K_n$, és mivel $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \lim\limits_{n\to\infty} K_n = 2\pi R$, ezért $K = 2\pi R$.

Megjegyzés: Teljesen hasonlóan bizonyítható a kör területszámolási képlete is, $T = \pi R^2$.

23. feladat: Határozzuk meg az $f : [0,1] \to R$, $f(x) = x^2$ függvény, az *x=0, x=1* és az *O*x tengely által közrezárt síkrész területét.

Megoldás: Osszuk fel a [0,1] intervallumot n egyenlő részre. Ezáltal közelítsük meg a szóbanforgó területet téglalapokkal többlettel, és hiánnyal, a mellékelt ábrák szerint:





A „nagy téglalapok" összterülete $T_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$, továbbá a „kis téglalapok" összterülete $t_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$. A szóbanforgó T területre igaz, hogy $t_n < T < T_n$ és mivel $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{3}$, ezért $T = \frac{1}{3}$.

Megjegyzés: Az integrálszámolásról tanultak alapján tulajdonképpen $T = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

24. feladat: Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n-2)\cdot(2n)}\right]^2 \cdot \frac{1}{n} = \pi$ (Wallis-képlet)

Megoldás: Vezessük be a következő jelölést: $I_m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx$. A parciális integrálási módszerrel rekurzív módon, a matematikai indukció módszerével levezethetők a következő eredmények:

$I_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n-2)\cdot(2n)} \cdot \frac{\pi}{2}$ illetve $I_{2n+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot ...\cdot\frac{2n}{2n+1}$. Továbbá mivel minden $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ és $n \in \mathrm{N}^*$ esetén igaz, hogy $\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x$ amit a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon integrálva, és az előbbiek szerint behelyettesítve az I_{2n+1}, I_{2n}, I_{2n-1} értékeit, rövid számolások után kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{2}{2n+1}}<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}<\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

ahonnan a rendőrelvvel éppen a bizonyítandó határérték adódik.

Végezetül megjegyezzük, hogy ha egy x valós számnak a tizedes formában való reprezentálása $x=A,a_1a_2...a_n...$, akkor az $x'=A,a_1a_2...a_n$ tizedes tört hiánnyal, az $x''=A,a_1a_2...a_n+\frac{1}{10^n}$ tizedes tört pedig többlettel közelítik meg az x számot, vagyis $x'<x<x''$, ami tulajdonképpen szintén a fogótételhez kapcsolódik.

A módszer jobb megértése és elmélyítése céljából, a Tisztelt Olvasónak a következő válogatott feladatokat javasoljuk megoldásra:

Javasolt feladatok

A rendőrelv segítségével számítsuk ki a következő határértékeket:

1) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sin n+7\cos\frac{n}{2}+6n^2}{1-2n^2}$ 2) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 3) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)...(1+n^2)}$

4) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)^n}{(2n)!}$ 5) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}+...\frac{1}{(2n+n-1)^2}\right)$ 6) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{3^n}$

6) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+...+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$ 7) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3}{n^4+1}+\frac{2^3}{n^4+2}+...+\frac{n^3}{n^4+n}$

8) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cos 1}{n^2+1}+\frac{\cos 2}{n^2+2}+...+\frac{\cos n}{n^2+n}\right)$ 9) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos 1+\cos 2+...+\cos n}{n^2}$

10) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+n-1)^2}}\right)$ 11) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1!+2!+...+n!}{(2n)!}$

12) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1}}+\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+2}}+...+\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+n}}\right)$ 13) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n}\right\}$

14) $b_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+2}}-...-\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+n}}\right)$ 15) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-n\right)$

16) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[n\sqrt{2}\right]}{n}\left\{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}\right\}$ 17) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}$

18) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[1^3\cdot x\right]+\left[2^3\cdot x\right]+...+\left[n^3\cdot x\right]}{n^4}$ 19) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^1}+...\frac{1}{C_n^n}\right)$

20) $L=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^1}+...\frac{1}{C_n^n}-2\right)$ 21) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\right)$

22) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$ 23) $L=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)$ 24) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n$

25) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}p_1a_i^n}$ ahol $p_i,a_i\in R_+^*-\{1\}$ 26) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

27) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)+...+\left(1+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$ 28) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+...+\frac{1}{2n+n}\right)$

29) $L=\lim_{n\to\infty}\left(arc\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+arc\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+...+arc\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

30) $L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$ 31) $L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{pn}\right), p\in N^*-\{1\}$

Szakirodalom:

[1] Pólya György, Szegő Gábor: Feladatok és tételek az analízis köréből, I. Tankönyvkiadó, 1980, 254. oldal

[2] Dragos Popescu, George Oboroceanu: Exaecitii si probleme de algebra combinatorica si teoria numerelor, EDP, Bucuresti, 1979

[3] Bencze Mihály: Az „e” számmal kapcsolatos egyenlőtlenségek, MaTa 1/1989

[4] Lia Arama, Teodor Morozan: Probleme de calcul diferential si integral, Editura Tehnica, Bucuresti – 1978

[5] A. Corduneanu és társai: Culegere de probleme de matematica pentru admitere in invatamantul superior, Editura Junimea, 1972