Tuzson Zoltán

A Sturm-módszer és alkalmazása

Számtalan szélsőérték probléma megoldása, vagy egyenlőtlenség bizonyítása nagyon gyakran, már a matematikai analízis eszközeire szorítkozik, mint például a Jensen-, Hölder-féle egyenlőtlenség, deriváltak stb.
A Sturm-módszerrel, számos ilyen – úgymond az algebra, mértan, trigonometria, és analízis határán „elhelyezkedő” – feladat, elemi eszközökkel oldható meg.
A módszert főleg $n \geq 2$ változót tartalmazó, szimmetrikus kifejezések esetén alkalmazhatjuk, amikor az ismeretlenek valamilyen kikötésnek vagy feltételnek tesznek eleget.
A módszer lényege röviden: állandó összeg (vagy szorzat) mellett, valamely kétváltozós kifejezés változását követjük, miközben a változókat úgy közelítjük egymáshoz, hogy az összegük (illetve a szorzatuk) állandó maradjon. A változások megfigyeléséből, meghatározva az egyik változó értékét, újrakezdjük az eljárást, de ezúttal $n-1$ változó esetén. Véges ilyen lépés után, az eljárásunk véget ér.
A módszer lényegét a következő feladatok segítségével jobban megérthetjük. A módszer kezdetét a következő két feladat jelenti.

1. Alkalmazás: Ha $x, y \in R$ és $x+y=S$ állandó, akkor a $P(x,y)=x \cdot y$ szorzat:

a) növekszik, ha az $|x-y|$ különbség csökken,

b) csökken, ha az $|x-y|$ különbség növekszik.

Bizonyítás: Nyilván feltehető, hogy $x<y$, ekkor létezik olyan $e>0$ amelyre $2e<y-x$. Így az $x+e$ és $y-e$ számok közelebb vannak egymáshoz, mint az x és y számok, az $x<x+e<y-e<y$ elrendezés miatt. Mivel $2e<y-x$, mindenképpen $e<y-x$ (i). Ekkor $P(x+e,y-e)-P(x,y)=e(y-x-e)>0$, és ezért az a) állítás igaz. Az $x-e$ és $y+e$ számok nyílván távolabb vannak egymástól, mint az x és y számok. Az $x-e<x\leq y<y+e$ elrendezés miatt, hiszen $x-y<0$, méginkább $x-y<e$ (ii). Ekkor felírható, hogy $P(x-e,y+e)-P(x,y)=e(x-y-e)<0$, és ezért a b) állítás is igaz.

2. Alkalmazás: Ha $x, y \in R_+$ és $x \cdot y = P$, akkor az $S(x,y)=x+y$ összeg:

a) csökken, ha az $|x-y|$ különbség csökken,

b) növekszik, ha az $|x-y|$ különbség növekszik.

Bizonyítás: Nyilván feltehető, hogy $0<x<y$, ekkor létezik olyan $k>1$ amelyre $k^2<\frac{y}{x}$. Így a kx és $\frac{y}{k}$ számok közelebb vannak egymáshoz, mint az x és y számok, a $0<x<kx<\frac{y}{k}<y$ elrendezés miatt. Mivel $1<k^2<\frac{y}{x}$, ezért mindenképpen $1<k<\frac{y}{x}$ (iii). Ekkor
$$S\left(kx,\frac{y}{k}\right)-S(x,y)=\frac{x}{k}(k-1)\left(k-\frac{y}{x}\right)<0,$$
ezért az a) állítás igaz. A b) állítás bizonyítása is hasonló, ott ellenben a $k\in(0,1)$ feltételt kell figyelembe venni.

A továbbiakban terjesszük ki az előző tulajdonságokat a klasszikus számtani- és mértani közepek közötti egyenlőtlenség bizonyítására.

3. Alkalmazás: Ha minden $n \geq 2$ esetén $x_1, x_2, ..., x_n \in R_+$, akkor fennáll az $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$ egyenlőtlenség.

Bizonyítás: Feltételezzük, hogy $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, és legyen $P(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$, valamint $x_1 + x_2 + ... x_n = S$, bármely $n \geq 2$ esetén. Rögzítsük az $x_3, x_4, ..., x_n$ értékeket, és az x_1, x_2 változó marad. Tehát $x_1 + x_2 = S - (x_3 + x_4 + ... + x_n)$ állandó. Az 1. Alkalmazás alapján, ha az $x_2 - x_1$ különbség csökken, akkor a $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ szorzat növekszik. De $x_1 \leq \frac{S}{n}$, ezért az $x_2 - x_1$ különbség akkor csökken a legtöbbet, ha éppen $x_1 = \frac{S}{n}$.

Tehát $P(x_1, x_2, ..., x_n) \leq P\left(\frac{S}{n}, x_2, ..., x_n\right)$ (1).

Továbbá $x_2 + x_3 + ... x_n = S - \frac{S}{n} = \frac{(n-1)S}{n}$.

Az előbbiek mintájára rögzítsük az $x_4, x_5, ..., x_n$ számokat, az x_2, x_3 pedig legyen változó. Tehát az $x_2 + x_3 = \frac{(n-1)S}{n} - (x_4 + x_5 + ... + x_n)$ állandó. Továbbá az $x_3 - x_2$ csökkenése, a $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ szorzat növekedését idézi elő. De $x_2 \leq \frac{(n-1)S}{n} : (n-1) = \frac{S}{n}$, így az előzőek alapján azt kapjuk, hogy $P\left(\frac{S}{n}, x_2, ..., x_n\right) \leq P\left(\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, x_3, ..., x_n\right)$ (2).

Könnyen belátható, hogy ha tovább folytatjuk az eljárást, akkor végül is

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) \leq P\left(\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, ..., \frac{S}{n}\right) = \left(\frac{S}{n}\right)^n$$

adódik, ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget jelenti.

Megjegyzések: A bizonyítottakból megállapíthatók, hogy:

1) Ha az $x_1 + x_2 + ... x_n = S$ összeg állandó, akkor a $P(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ szorzat akkor a legnagyobb, ha $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

2) Ha az $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = P$ szorzat állandó, akkor az $S(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$ összeg akkor a legkisebb, ha $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

4. Alkalmazás:

Ha $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{n} x_i = \pi$, akkor $\prod_{i=1}^{n} \sin x_i \leq \left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^n$.

Bizonyítás: A szimmetria miatt feltételezhető, hogy $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ (1)

Rögzítsük az $x_3, x_4, ..., x_n$ értékeket, így $x_1 + x_2 = S$ állandó (2), ahol $S = \pi - \sum_{i=3}^{n} x_i$.

Legyen továbbá $E(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \sin x_i$.

Közelítsük az x_1, x_2 értékeket úgy, hogy az összegük S maradjon. Két ilyen érték tehát $x_1 + e$ és $x_2 - e$, ahol $0 < e < x_2 - x_1$. Ekkor

$$E(x_1 + e, x_2 - e, x_3, ..., x_n) - E(x_1, x_2, ..., x_n) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos(x_2 - x_1 - 2e) - \cos(x_2 - x_1)\right] \cdot \prod_{i=3}^{n} \sin x_i$$

(3). De $0 < x_2 - x_1 - 2e < x_2 - x_1 < \pi$, ezért $\cos(x_2 - x_1 - 2e) > \cos(x_2 - x_1)$, tehát a (3) sorában levő különbség pozitív. Tehát, ha $x_2 - x_1$ csökken, és $x_1 + x_2 = S$ állandó, akkor $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ növekszik.

Az (1) és $\sum_{i=1}^{n} x_i = \pi$ alapján, $x_1 \leq \frac{\pi}{n}$ (ellenkező esetben $x_1 + x_2 + ... x_n > \pi$ lenne) Tehát a (2) feltétellel, az $x_2 - x_1$ távolság a legkisebb, ha $x_1 = \frac{\pi}{n}$. Így $E(x_1, x_2, ..., x_n) \leq E\left(\frac{\pi}{n}, x_2, ..., x_n\right)$. Most az $x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n$, $x_2 + x_3 + ... + x_n = \frac{(n-1)\pi}{n}$

és $x_2+x_3=S$ (állandó) feltétel mellett megismételjük az eljárást és hasonlóan kapjuk, hogy $E(\frac{\pi}{n},x_2,...,x_n)\le E\left(\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n},x_3,...,x_n\right)$. Még *(n-1)*-szer megismételve az eljárást, végül is a láncszabály alapján azt kapjuk, hogy $E(x_1,x_2,...,x_n)\le E\left(\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n},...,\frac{\pi}{n}\right)=\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n$ vagyis éppen amit bizonyítani akartunk.

5. Alkalmazás: Ha $x_1,x_2,...,x_n\ge 0$ és $\prod_{i=1}^{n}x_i=x^n$, akkor $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\ge(1+x)^n$.

Bizonyítás: Feltételezzük, hogy $0\le x_1\le x_2\le...\le x_n$ (1). Rögzítsük az $x_3,x_4,...,x_n$ értékeket, így $x_1\cdot x_2=P$ (2) állandó, ahol $P=x^n:(x_1x_2...x_n)$. Legyen $E(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$, k>1 és $k^2<\frac{x_2}{x_1}$. Ekkor kx_1 közelebb van az $\frac{x_2}{k}$ számhoz, mint az x_1 az x_2-höz, és $1<k<\frac{x_2}{x_1}$. Tehát felírható, hogy:

$$E(kx_1,\frac{x_2}{k},x_3,...,x_n)-E(x_1,x_2,...,x_n)=$$

$$=\frac{x_1}{k}(1-k)\left(\frac{x_2}{x_1}-k\right)\prod_{i=3}^{n}(1+x_i)<0.$$

Tehát, ha az x_1,x_2 értékeket úgy közelítjük egymáshoz, hogy a szorzatuk $P=x_1\cdot x_2$ állandó marad, az $E(x_1,x_2,...,x_n)$ kifejezés csökken. Az $\prod_{i=1}^{n}x_i=x^n$ és az (1) alapján biztosan igaz, hogy $x_1\le x$. Tehát az x_2-x_1 különbség a legkisebb, ha $x_1=x$, így $E(x_1,x_2,...,x_n)\ge E(x,x_2,...,x_n)$. Az eljárás ismételt alkalmazásával, a láncszabály alapján azt kapjuk, hogy $E(x_1,x_2,...,x_n)\ge E(x,x,...,x)=(1+x)^n$. Ezzel tulajdonképpen a $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\ge\left(1+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\right)^n$ egyenlőtlenséget igazoltuk.

A továbbiakban, bizonyos megszorításokkal szorzatok legkisebb, vagy összegek legnagyobb értékét vizsgáljuk.

6. Alkalmazás: Ha $x,y,z\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$ és $x\cdot y\cdot z=1$, határozzuk meg az $S(x,y,z)=x+y+z$ összeg maximumát.

Megoldás: Feltételezzük, hogy $0<x\le y\le z\le\frac{3}{2}$. Rögzítsük a z értékét és x, y maradjon változó. Ekkor $x\cdot y=\frac{1}{z}$ állandó. Ha az $y-x$ különbség növekszik, akkor az $S(x,y,z)$ összeg csökken. Az $y-x$ különbség annál nagyobb, minél kisebb az x értéke. Mivel $x=\frac{1}{yz}\ge\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{4}{9}$, ezért $x=\frac{4}{9}$ a legkisebb elérhető érték. Így $S(x,y,z)\le S\left(\frac{4}{9},y,z\right)=\frac{4}{9}+y+z$. Ezúttal most $y\cdot z=\frac{9}{4}$, és a $z-y$ különbség növekedésével az $y+z$ összeg csökken. Mivel $y=\frac{9}{4z}\ge\frac{9}{4\cdot\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$, ezért $y=\frac{3}{2}$ a legkisebb elérhető érték. De ekkor az $y\cdot z=\frac{9}{4}$ alapján $z=\frac{3}{2}$, tehát $S(x,y,z)\le S\left(\frac{4}{9},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{9}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{31}{9}$.

7. Alkalmazás: Ha $x,y,z\ge 0$ és $x+y+z=1$, akkor $\frac{yz}{x+1}+\frac{zx}{y+1}+\frac{xy}{z+1}\le\frac{1}{4}$.

Bizonyítás: A feladatot átírva azt kapjuk, hogy:

$xy+yz+zx-xyz\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)\le\frac{1}{4}$

.Ha most alkalmazzuk az $x+1, y+1, z+1$ értékekre a számtani és a harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget, akkor $\frac{3}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}}\le\frac{x+1+y+1+z+1}{3}=\frac{4}{3}$

vagyis $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\ge\frac{9}{4}$. Így ha $x,y,z\ge0$ és $x+y+z=1$, elegendő bizonyítani, hogy:

$E(x,y,z)=xy+yz+zx-\frac{9}{4}xyz\le\frac{1}{4}$ (*).

Feltételezzük, hogy $0<x\le y\le z$ (1), és rögzítsük a z értékét. Tehát $x+y=1-z$ (állandó) (2). Közelítsük az $x<y$ értékeket egymáshoz úgy, hogy közben az összeg változatlan maradjon. Ekkor tehát $E(x+e,y-e,z)-E(x,y,z)=e(y-x-e)\left(1-\frac{9}{4}z\right)$ (**), ahol $0<e<y-x$. Ennek alapján:

1) Ha $z<\frac{4}{9}$, a (**) különbség pozitív, így $E(x,y,z)$ akkor növekszik, ha az *x* és az *y* közeledik egymáshoz. Az $x+y+z=1$ és (1) miatt $x\le\frac{1}{3}$, a (2) alapján az x legközelebb van az *y*-hoz, ha $x=\frac{1}{3}$. Tehát $E(x,y,z)\le E\left(\frac{1}{3},y,z\right)$, ahol $y+z=\frac{2}{3}$ és $y\le z$. Hasonlóan $y\le\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$, így az y a legközelebb áll a z-hez, ha $y=\frac{1}{3}$, ezért $z=\frac{1}{3}$. Tehát $E\left(\frac{1}{3},y,z\right)\le E\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}$

2) Ha $z>\frac{4}{9}$, akkor a (**) különbség negatív, így $E(x,y,z)$ akkor növekszik, ha *x*-et és *y*-t távolítjuk egymástól, persze *x*+ *y*= *1*-*z* állandó marad. Az (1) és (2) miatt az x=0, az y-tól a legtávolabbi értéket adja. Így $E(x,y,z)\le E(0,y,z)=yz$, ahol $y+z=1$ és $y\le z$. Most az y-t és a z-t közelítenünk kell egymáshoz. De $y\le\frac{1}{2}$ miatt a legközelebbi y érték a z-hez, az $y=\frac{1}{2}$, ahonnan $z=\frac{1}{2}$. Tehát $E(0,y,z)\le E\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. Ezek szerint $E(x,y,z)$ maximális, ha $x=y=z=\frac{1}{3}$ vagy $x=0, y=z=\frac{1}{2}$ és a szimmetria miatt, ennek a cirkuláris permutációi.

8. Alkalmazás: Ha $u,v,w\in\left[0,\frac{7}{16}\right]$ és $u+v+w=1$, határozzuk meg az $E(u,v,w)=(1+u)(1+v)(1+w)$ kifejezés legkisebb értékét.

Megoldás: Feltételezzük, hogy $0\le u\le v\le w\le\frac{7}{16}$ (1). Rögzítsük a w-t, legyen $u<v$, miközben $u+v=1-w$ állandó (2). Közelítsük egymáshoz az u-t és a v-t úgy, hogy az összegük maradjon állandó. Ekkor felírható, hogy $E(u+e,v-e,w)-E(u,v,w)=e(1+w)(v-u-e)>0$ ami azt jelenti, hogy $E(u,v,w)$ növekszik, így a minimum meghatározásánál ez nem segít. Távolítsuk hát az u-t és a v-t úgy, hogy az összegük maradjon állandó. Ekkor az $u+v=1-w$ és (1) feltételek mellett a v-től a legtávolabbra eső u érték nem 0, hiszen u= 0 esetén v+ w= 1 lenne, ahonnan $w\ge\frac{1}{2}$ lenne, ami ellentmond a $w\le\frac{7}{16}$ feltételnek. Mivel $1-u=v+w\le\frac{7}{16}+\frac{7}{16}$, ezért $\frac{1}{8}\le u$, így $u=\frac{1}{8}$ a megfelelő. Ekkor $E(u,v,w)\ge E\left(\frac{1}{8},v,w\right)$, $\frac{1}{8}\le v\le w\le\frac{7}{27}$ és $v+w=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ (3). További csökkentés végett a w és v közötti távolságot ismét növelni kell. Mivel

$\frac{7}{8}-v=w\le\frac{7}{16}\Rightarrow\frac{7}{16}\le v$, ezért $v=\frac{7}{16}$ a legközelebbi v érték a w-hez, és a (3) alapján $w=\frac{7}{16}$. Tehát

$$E\left(\frac{1}{8},v,w\right)\ge E\left(\frac{1}{8},\frac{7}{16},\frac{7}{16}\right)=\frac{9}{8}\left(\frac{23}{16}\right)^2.$$

Ezek szerint $E(u,v,w)$ akkor a legkisebb, ha $u=\frac{1}{8}, v=w=\frac{7}{16}$ és ennek a cirkuláris permutációi.

A módszer jobb elmélyítése végett, az érdeklődő Olvasónak a következő feladatok megoldását javasoljuk:

1) Ha $x_1,x_2,...,x_n\in[0,1]$ és $\sum_{i=1}^{n}x_i=S$, akkor $1-S\le\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\le\frac{1}{1+S}$.

2) Ha $x_1,x_2,...,x_n>0$, és $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$, akkor $\prod_{i=1}^{n}x_i(1-x_i)\le\frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$.

3) Ha $x_1,x_2,...,x_n\in(0,1)$ és $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$, akkor $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}\ge\frac{n^2}{n-1}$.

4) Ha $x_1,x_2,...,x_n\in(0,1)$, akkor $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)>1-\sum_{i=1}^{n}x_i$.

5) $x_1,x_2,...,x_n>1$, és $\prod_{i=1}^{n}x_i=x^n$, akkor $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i}\ge\frac{n}{1+x}$. Amennyiben $x_1,x_2,...,x_n\in(0,1)$, akkor az egyenlőtlenség fordított irányú.

6) Ha $x_1,x_2,...,x_n>0$ és $\sum_{i=1}^{n}x_i=S$, akkor $\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right)\ge\left(1+\frac{n}{S}\right)^n$.

7) Ha $x,y,z\ge0$ és $x+y+z=1$, akkor $5(x^2+y^2+z^2)+18xyz\ge\frac{7}{3}$.

8) Ha $x,y,z\ge0$ és $x+y+z=1$, akkor $0\le xy+yz+zx-2xyz\le\frac{7}{27}$

9) Ha $x,y,z\in\left[1,\frac{23}{16}\right]$ és $x+y+z=4$, határozzuk meg az $F(x,y,z)=xyz$ kifejezés legkisebb értékét.

Forrásanyag:

[1] Mircea Ganga: Teme si probleme de matematica, Editura Tehnica, Bucuresti- 1991 (117.- 123. oldal)

[2] L. Panaitopol és társai: Egyenlőtlenségek (magyarra fordította András Szilárd), Gil Könyvkiadó, Zilah, 1996