A Sturm-módszer és alkalmazása

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Számtalan szélsőérték probléma megoldása, vagy egyenlőtlenség bizonyítása nagyon gyakran, már a matematikai analízis eszközeire szorítkozik, mint például a Jensen-, Hölder-féle egyenlőtlenség, deriváltak stb.

A Sturm-módszerrel, számos ilyen – úgymond az algebra, mértan, trigonometria, és analízis határán „elhelyezkedő” – feladat, elemi eszközökkel oldható meg.
A módszert főleg $n \geq 2$ változót tartalmazó, szimmetrikus kifejezések esetén alkalmazhatjuk, amikor az ismeretlenek valamilyen kikötésnek vagy feltételnek tesznek eleget.

A módszer lényege röviden: állandó összeg (vagy szorzat) mellett, valamely kétváltozós kifejezés változását követjük, miközben a változókat úgy közelítjük egymáshoz, hogy az összegük (illetve a szorzatuk) állandó maradjon. A változások megfigyeléséből, meghatározva az egyik változó értékét, újrakezdjük az eljárást, de ezúttal $n-1$ változó esetén. Véges ilyen lépés után, az eljárásunk véget ér.

A módszer lényegét a következő feladatok segítségével jobban megérthetjük. A módszer kezdetét a következő két tulajdonság jelenti:

1. Alkalmazás: Ha $x, y \in R$ és $x + y = S$ állandó, akkor a $P(x, y) = x \cdot y$ szorzat:

a) növekszik, ha az $|x - y|$ különbség csökken,

b) csökken, ha az $|x - y|$ különbség növekszik.

Bizonyítás: Nyilván feltehető, hogy $x < y$, ekkor létezik olyan $e > 0$ amelyre $2e < y - x$. Így az $x + e$ és $y - e$ számok közelebb vannak egymáshoz, mint az x és y számok, az $x < x + e < y - e < y$ elrendezés miatt. Mivel $2e < y - x$, mindenképpen $e < y - x$ (i). Ekkor $P(x+e, y-e) - P(x, y) = e(y - x - e) > 0$, és ezért az a) állítás igaz. Az $x - e$ és $y + e$ számok nyílván távolabb vannak egymástól, mint az x és y számok. Az $x - e < x \leq y < y + e$ elrendezés miatt, hiszen $x - y < 0$, méginkább $x - y < e$ (ii).

Ekkor felírható, hogy $P(x-e, y+e) - P(x, y) = e(x - y - e) < 0$, és ezért a b) állítás is igaz.

2. Alkalmazás: Ha $x, y \in R_+$ és $x \cdot y = P$, akkor az $S(x, y) = x + y$ összeg:

a) csökken, ha az $|x - y|$ különbség csökken,

b) növekszik, ha az $|x - y|$ különbség növekszik.

Bizonyítás: Nyilván feltehető, hogy $0 < x < y$, ekkor létezik olyan $k > 1$ amelyre $k^2 < \frac{y}{x}$. Így a kx és $\frac{y}{k}$ számok közelebb vannak egymáshoz, mint az x és y számok, a $0 < x < kx < \frac{y}{k} < y$ elrendezés miatt. Mivel $1 < k^2 < \frac{y}{x}$, ezért mindenképpen $1 < k < \frac{y}{x}$ (iii). Ekkor $S\left(kx, \frac{y}{k}\right) - S(x, y) = \frac{x}{k}(k-1)\left(k - \frac{y}{x}\right) < 0$, ezért az a) állítás igaz. A b) állítás bizonyítása is hasonló, ott ellenben a $k \in (0,1)$ feltételt kell figyelembe venni.

A továbbiakban terjesszük ki az előző tulajdonságokat a klasszikus számtani- és mértani közepek közötti egyenlőtlenség bizonyítására.

<u>3.Alkalmazás</u>: Ha minden $n \geq 2$ esetén $x_1, x_2, ..., x_n \in R_+$, akkor fennáll az $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$ egyenlőtlenség.

Bizonyítás: Feltételezzük, hogy $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, és legyen $P(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$, valamint $x_1 + x_2 + ... x_n = S$, bármely $n \geq 2$ esetén. Rögzítsük az $x_3, x_4, ..., x_n$ értékeket, és az x_1, x_2 változó marad. Tehát $x_1 + x_2 = S - (x_3 + x_4 + ... + x_n)$ állandó. Az 1. Alkalmazás alapján, ha az $x_2 - x_1$ különbség csökken, akkor a $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ szorzat növekszik. De $x_1 \leq \frac{S}{n}$, ezért az $x_2 - x_1$ különbség akkor csökken a legtöbbet, ha éppen $x_1 = \frac{S}{n}$. Tehát $P(x_1, x_2, ..., x_n) \leq P\left(\frac{S}{n}, x_2, ..., x_n\right)$ (1). Továbbá $x_2 + x_3 + ... x_n = S - \frac{S}{n} = \frac{(n-1)S}{n}$. Az előbbiek mintájára rögzítsük az $x_4, x_5, ..., x_n$ számokat, az x_2, x_3 pedig legyen változó. Tehát az $x_2 + x_3 = \frac{(n-1)S}{n} - (x_4 + x_5 + ... + x_n)$ állandó. Továbbá az $x_3 - x_2$ csökkenése, a $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ szorzat növekedését idézi elő. De $x_2 \leq \frac{(n-1)S}{n} : (n-1) = \frac{S}{n}$, így az

előzőek alapján azt kapjuk, hogy $P\left(\frac{S}{n}, x_2, ..., x_n\right) \leq P\left(\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, x_3, ..., x_n\right)$ (2).

Könnyen belátható, hogy ha tovább folytatjuk az eljárást, akkor végül is

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) \le P\left(\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, ..., \frac{S}{n}\right) = \left(\frac{S}{n}\right)^n$$

adódik, ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget jelenti.

Megjegyzések: A bizonyítottakból megállapíthatók, hogy:

1) Ha az $x_1 + x_2 + ...x_n = S$ összeg állandó, akkor a $P(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ szorzat akkor a legnagyobb, ha $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

2) Ha az $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = P$ szorzat állandó, akkor az $S(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$ összeg akkor a legkisebb, ha $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

__**4. Alkalmazás:**__ Ha $x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$ és $\sum_{i=1}^{n} x_i = \pi$, akkor $\prod_{i=1}^{n} \sin x_i \le \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n$.

Bizonyítás: A szimmetria miatt feltételezhető, hogy $0 \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ (1) Rögzítsük az $x_3, x_4, ..., x_n$ értékeket, így $x_1 + x_2 = S$ állandó (2), ahol $S = \pi - \sum_{i=3}^{n} x_i$. Legyen továbbá $E(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \sin x_i$. Közelítsük az x_1, x_2 értékeket úgy, hogy az összegük S maradjon. Két ilyen érték tehát $x_1 + e$ és $x_2 - e$, ahol $0 < e < x_2 - x_1$. Ekkor $E(x_1 + e, x_2 - e, x_3, ..., x_n) - E(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{2}\left[\cos(x_2 - x_1 - 2e) - \cos(x_2 - x_1)\right] \cdot \prod_{i=3}^{n} \sin x_i$ (3).

De $0 < x_2 - x_1 - 2e < x_2 - x_1 < \pi$, ezért $\cos(x_2 - x_1 - 2e) > \cos(x_2 - x_1)$, tehát a (3) sorában levő különbség pozitív. Tehát, ha $x_2 - x_1$ csökken, és $x_1 + x_2 = S$ állandó, akkor $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ növekszik. Az (1) és $\sum_{i=1}^{n} x_i = \pi$ alapján, $x_1 \le \frac{\pi}{n}$ (ellenkező esetben $x_1 + x_2 + ...x_n > \pi$ lenne)

Tehát a (2) feltétellel, az $x_2 - x_1$ távolság a legkisebb, ha $x_1 = \frac{\pi}{n}$. Így $E(x_1, x_2, ..., x_n) \le E\left(\frac{\pi}{n}, x_2, ..., x_n\right)$. Most az $x_2 \le x_3 \le ... \le x_n$, $x_2 + x_3 + ... + x_n = \frac{(n-1)\pi}{n}$ és $x_2 + x_3 = S$ (állandó) feltétel mellett megismételjük az eljárást és hasonlóan kapjuk, hogy $E(\frac{\pi}{n}, x_2, ..., x_n) \le E\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}, x_3, ..., x_n\right)$. Még *(n-1)*-szer megismételve az eljárást, végül is a láncszabály alapján azt kapjuk, hogy $E(x_1, x_2, ..., x_n) \le E\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}, ..., \frac{\pi}{n}\right) = \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^n$ vagyis éppen amit bizonyítani akartunk.

5. Alkalmazás: Ha $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ és $\prod_{i=1}^{n} x_i = x^n$, akkor $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq (1+x)^n$.

Bizonyítás: Feltételezzük, hogy $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ (1). Rögzítsük az $x_3, x_4, ..., x_n$ értékeket, így $x_1 \cdot x_2 = P$ (2) állandó, ahol $P = x^n : (x_1 x_2 ... x_n)$. Legyen $E(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$, k>1 és $k^2 < \frac{x_2}{x_1}$. Ekkor kx_1 közelebb van az $\frac{x_2}{k}$ számhoz, mint az x_1 az x_2-höz, és $1 < k < \frac{x_2}{x_1}$.

Tehát felírható, hogy: $E(kx_1, \frac{x_2}{k}, x_3, ..., x_n) - E(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{x_1}{k}(1-k)\left(\frac{x_2}{x_1} - k\right)\prod_{i=3}^{n}(1+x_i) < 0$.

Tehát, ha az x_1, x_2 értékeket úgy közelítjük egymáshoz, hogy a szorzatuk $P = x_1 \cdot x_2$ állandó marad, az $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ kifejezés csökken. Az $\prod_{i=1}^{n} x_i = x^n$ és az (1) alapján biztosan igaz, hogy $x_1 \leq x$. Tehát az $x_2 - x_1$ különbség a legkisebb, ha $x_1 = x$, így $E(x_1, x_2, ..., x_n) \geq E(x, x_2, ..., x_n)$. Az eljárás ismételt alkalmazásával, a láncszabály alapján azt kapjuk, hogy $E(x_1, x_2, ..., x_n) \geq E(x, x, ..., x) = (1+x)^n$. Ezzel tulajdonképpen a $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq \left(1 + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right)^n$ egyenlőtlenséget igazoltuk.

A továbbiakban, bizonyos megszorításokkal szorzatok legkisebb, vagy összegek legnagyobb értékét vizsgáljuk.

6. Alkalmazás: Ha $x, y, z \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$ és $x \cdot y \cdot z = 1$, határozzuk meg az $S(x, y, z) = x + y + z$ összeg maximumát.

Megoldás: Feltételezzük, hogy $0 < x \leq y \leq z \leq \frac{3}{2}$. Rögzítsük a z értékét és *x, y* maradjon változó. Ekkor $x \cdot y = \frac{1}{z}$ állandó. Ha az $y - x$ különbség növekszik, akkor az $S(x, y, z)$ összeg csökken. Az $y - x$ különbség annál nagyobb, minél kisebb az x értéke. Mivel $x = \frac{1}{yz} \geq \frac{1}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{4}{9}$, ezért $x = \frac{4}{9}$ a legkisebb elérhető érték. Így $S(x, y, z) \leq S\left(\frac{4}{9}, y, z\right) = \frac{4}{9} + y + z$. Ezúttal most $y \cdot z = \frac{9}{4}$, és a $z - y$ különbség növekedésével az $y+z$ összeg csökken. Mivel $y=\frac{9}{4z}\geq\frac{9}{4\cdot\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$, ezért $y=\frac{3}{2}$ a legkisebb elérhető érték. De ekkor az $y\cdot z=\frac{9}{4}$ alapján $z=\frac{3}{2}$, tehát $S(x,y,z)\leq S\left(\frac{4}{9},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{9}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{31}{9}$.

<u>**7. Alkalmazás**</u>: Ha $x,y,z\geq 0$ és $x+y+z=1$, akkor $\frac{yz}{x+1}+\frac{zx}{y+1}+\frac{xy}{z+1}\leq\frac{1}{4}$.

Bizonyítás: A feladatot átírva azt kapjuk, hogy: $xy+yz+zx-xyz\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)\leq\frac{1}{4}$.

Ha most alkalmazzuk az $x+1,y+1,z+1$ értékekre a számtani és a harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget, akkor $\frac{3}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}}\leq\frac{x+1+y+1+z+1}{3}=\frac{4}{3}$ vagyis $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\geq\frac{9}{4}$. Így ha $x,y,z\geq 0$ és $x+y+z=1$, elegendő bizonyítani, hogy:

$$E(x,y,z)=xy+yz+zx-\frac{9}{4}xyz\leq\frac{1}{4}\ (*).$$

Feltételezzük, hogy $0<x\leq y\leq z$ (1), és rögzítsük a z értékét. Tehát $x+y=1-z$ (állandó) (2). Közelítsük az $x<y$ értékeket egymáshoz úgy, hogy közben az összeg változatlan maradjon. Ekkor tehát $E(x+e,y-e,z)-E(x,y,z)=e(y-x-e)\left(1-\frac{9}{4}z\right)$ (**), ahol $0<e<y-x$.

Ennek alapján:

1) Ha $z<\frac{4}{9}$, a (**) különbség pozitív, így $E(x,y,z)$ akkor növekszik, ha az x és az y közeledik egymáshoz. Az $x+y+z=1$ és (1) miatt $x\leq\frac{1}{3}$, a (2) alapján az x legközelebb van az y-hoz, ha $x=\frac{1}{3}$. Tehát $E(x,y,z)\leq E\left(\frac{1}{3},y,z\right)$, ahol $y+z=\frac{2}{3}$ és $y\leq z$. Hasonlóan $y\leq\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$, így az y a legközelebb áll a z-hez, ha $y=\frac{1}{3}$, ezért $z=\frac{1}{3}$. Tehát $E\left(\frac{1}{3},y,z\right)\leq E\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}$

2) Ha $z > \frac{4}{9}$, akkor a (**) különbség negatív, így $E(x, y, z)$ akkor növekszik, ha *x*-et és *y*-t távolítjuk egymástól, persze *x*+ *y*= *1*-*z* állandó marad. Az (1) és (2) miatt az x=0, az y-tól a legtávolabbi értéket adja. Így $E(x, y, z) \le E(0, y, z) = yz$, ahol $y + z = 1$ és $y \le z$. Most az y-t és a z-t közelítenünk kell egymáshoz. De $y \le \frac{1}{2}$ miatt a legközelebbi y érték a z-hez, az $y = \frac{1}{2}$, ahonnan $z = \frac{1}{2}$. Tehát $E(0, y, z) \le E\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Ezek szerint $E(x, y, z)$ maximális, ha $x = y = z = \frac{1}{3}$ vagy $x = 0, y = z = \frac{1}{2}$ és a szimmetria miatt, ennek a cirkuláris permutációi.

<u>8.Alkalmazás</u>: Ha $u, v, w \in \left[0, \frac{7}{16}\right]$ és $u + v + w = 1$, határozzuk meg az $E(u, v, w) = (1+u)(1+v)(1+w)$ kifejezés legkisebb értékét.

Megoldás: Feltételezzük, hogy $0 \le u \le v \le w \le \frac{7}{16}$ (1). Rögzítsük a w-t, legyen $u < v$, miközben $u + v = 1 - w$ állandó (2). Közelítsük egymáshoz az u-t és a v-t úgy, hogy az összegük maradjon állandó. Ekkor felírható, hogy $E(u+e, v-e, w) - E(u, v, w) = e(1+w)(v - u - e) > 0$ ami azt jelenti, hogy $E(u, v, w)$ növekszik, így a minimum meghatározásánál ez nem segít. Távolítsuk hát az u-t és a v-t úgy, hogy az összegük maradjon állandó. Ekkor az $u + v = 1 - w$ és (1) feltételek mellett a v-től a legtávolabbra eső u érték nem 0, hiszen u= 0 esetén v+ w= 1 lenne, ahonnan $w \ge \frac{1}{2}$ lenne, ami ellentmond a $w \le \frac{7}{16}$ feltételnek. Mivel $1 - u = v + w \le \frac{7}{16} + \frac{7}{16}$, ezért $\frac{1}{8} \le u$, így $u = \frac{1}{8}$ a megfelelő. Ekkor

$E(u, v, w) \ge E\left(\frac{1}{8}, v, w\right)$, $\frac{1}{8} \le v \le w \le \frac{7}{27}$ és $v + w = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ (3). További csökkentés végett a w és v közötti távolságot ismét növelni kell. Mivel $\frac{7}{8} - v = w \le \frac{7}{16} \Rightarrow \frac{7}{16} \le v$, ezért $v = \frac{7}{16}$ a legközelebbi v érték a w-hez, és a (3) alapján $w = \frac{7}{16}$. Tehát

$$E\left(\frac{1}{8}, v, w\right) \ge E\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16}\right) = \frac{9}{8}\left(\frac{23}{16}\right)^2.$$

Ezek szerint $E(u,v,w)$ akkor a legkisebb, ha $u=\frac{1}{8}, v=w=\frac{7}{16}$ és ennek a cirkuláris permutációi.

A módszer jobb elmélyítése végett, az érdeklődő Olvasónak a következő feladatok megoldását javasoljuk:

1) Ha $x_1, x_2, ..., x_n \in [0,1]$ és $\sum_{i=1}^{n} x_i = S$, akkor $1-S \leq \prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \leq \frac{1}{1+S}$.

2) Ha $x_1, x_2, ..., x_n > 0$, és $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, akkor $\prod_{i=1}^{n} x_i(1-x_i) \leq \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$.

3) Ha $x_1, x_2, ..., x_n \in (0,1)$ és $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, akkor $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i} \geq \frac{n^2}{n-1}$.

4) Ha $x_1, x_2, ..., x_n \in (0,1)$, akkor $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) > 1-\sum_{i=1}^{n} x_i$.

5) $x_1, x_2, ..., x_n > 1$, és $\prod_{i=1}^{n} x_i = x^n$, akkor $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i} \geq \frac{n}{1+x}$. Amennyiben $x_1, x_2, ..., x_n \in (0,1)$, akkor az egyenlőtlenség fordított irányú.

6) Ha $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ és $\sum_{i=1}^{n} x_i = S$, akkor $\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right) \geq \left(1+\frac{n}{S}\right)^n$.

7) Ha $x, y, z \geq 0$ és $x+y+z=1$, akkor $5(x^2+y^2+z^2)+18xyz \geq \frac{7}{3}$.

8) Ha $x, y, z \geq 0$ és $x+y+z=1$, akkor $0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}$

9) Ha $x, y, z \in \left[1, \frac{23}{16}\right]$ és $x+y+z=4$, határozzuk meg az $F(x,y,z)=xyz$ kifejezés legkisebb értékét.

Forrásanyag:

[1] Mircea Ganga: Teme si probleme de matematica, Editura Tehnica, Bucuresti-1991 (117.-123. oldal)

[2] L. Panaitopol és társai: Egyenlőtlenségek (magyarra fordította András Szilárd), Gil Könyvkiadó, Zilah, 1996