A teveszabály és alkalmazásai

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

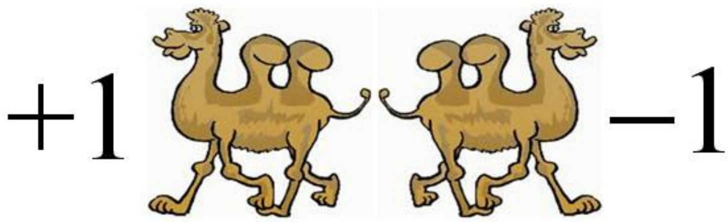
Gondolná-e valaki, hogy a matematikának lehetne-e valami köze a tevékhez? Ha nem akkor a továbbiakban meggyőzzük erről, mégpedig arról, hogy a matematikában igen is létezik egy olyan szabály, amit – többé vagy kevésbé humorosan- ***teveszabálynak*** neveznek. És ez nem vicc, mint látni fogjuk ez a szabály amilyen egyszerű, éppen olyan hasznos a matematikában.

Mielőtt megmondanánk, hogy miből áll ez a szabály és alkalmaznánk, azelőtt inkább rávilágítunk az eredetére. Tehát lássuk, honnan is ered ez a szabály.
Nézzük a következő mesés történetet:

Van egy öreg, arab kereskedő. Annak 3 fia és 19 tevéje. Amikor meghal az öreg, a végrendeletében tevéinek felét a legidősebbre, negyedét a középsőre, és ötödét a legkisebbre hagyta. Már a 19 teve felezésénél megakadtak a fiúk, mivel nem akartak tevét ölni. (Egy fél tevével nehéz zsákokat cipeltetni.) Gondolkoztak keményen, de csak nem tudták megoldani a problémát. Arra tevegelt egy irgalmas szamaritánus, aki egyből látta, hogy valami nagy gond szakadt a srácokra. Megkérdezte, majd nevetve közölte, hogy mi sem egyszerűbb ennél. Fogta a saját tevéjét és bevezette a 19 teve közé. (Így lett 20.) Majd szólt a legidősebb fiúnak, hogy csoportosítsa a tevék felét (10), a középsőnek, a negyedét (5), végül a legkisebbnek, hogy vigye el a tevék ötödét (4), és mivel 10+5+4=19 ezért az utolsó lépésként fogta a sajátját és tovatevegelt... ☺

Na persze, az osztozkodás megtörtént, úgy tűnik, hogy még a végrendeletet is betartották, vagy mégsem? Hát persze, hogy nem, hiszen a 19 teve fele az mégis csak $19 \cdot \frac{1}{2} = 9,5$ és nem 10 ahogyan kapta, a negyede az $19 \cdot \frac{1}{4} = 4,75$ és nem 5 ahogyan kapta, és az ötöde $19 \cdot \frac{1}{5} = 3,8$ és nem 4 ahogyan kapta. A fiuk ellenben örvendhettek, mert a tevék feldarabolásával nem volt vérontás… ☺

Annak ellenére, hogy a feladat „megoldása” nem helyes, mégis van belőle egy roppant egyszerű tanulság: ***a szamaritánus hozott 1 tevét…majd a végén el is vitte azt az 1 tevét***.



Hogy ez a tény mire jó? Nézzük csak a következő matematikatörténeti feladatot:

1.feladat:

Volt egyszer Indiában egy Shehrán nevű király, aki mindeneken uralkodott, csak saját unalmán nem. Reggel, délben, este, egész nap, folyton csak unatkozott. Annyira unta magát, hogy végül is belebetegedett az unalomba. Ágynak dőlt, felakadt a szeme, mintha haldoklana.
Sessa ebn Daher, az udvari bölcs, megsajnálta urát és hogy unalmát elűzze, feltalált egy játékot: a sakkot.
Ez a játék csodát művelt. Alig játszotta le a király az első játszmát, máris felépült.
- Mit kívánsz jutalmul? - kérdezte Shehrán.
- Tégy a sakktábla első kockájára egy búzaszemet, a másodikra kettőt, a harmadikra négyet és így tovább, minden kockára kétszer annyit, amennyi az előtte lévőn volt - mondta Sessa ebn

Daher.
- Amennyire a búzaszemek száma a duplázás folytán a 64 négyzetre nő, annyi búzaszem legyen a jutalmam.
- Szerény kérés! - mosolygott a király. - Beszéded mindazonáltal rejtvényesnek hat ...
- Fejtsd meg a rejtvényt és megtudod, hogy találmányom megfizethetetlen! - válaszolt a bölcs még rejtélyesebben.
Shehrán erre előhívatta tudósait, hogy oldják meg a talányt.
Azok neki is álltak és kiszámították, hogy ha a kérést teljesíteni akarnák, akkor hány búzaszemet is kell adjanak. Számítsuk ki, mennyi is ez?
Megoldás: Hamar belátjuk, hogy az össz búzaszem mennyiség éppen

$$x = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{63}$$

Sok feladat megoldásánál találkozunk azzal az ötlettel, hogy egy kifejezéshez adjunk hozzá valamit és vonjuk is le ugyanazt, ezzel ugyanis nem változik a kifejezés értéke, akárcsak az előbbi történetben a szamaritánus a tevékkel (***teveszabály*** ☺)!

A kiszámítandó összeghez adjunk hozzá 1-et és vonjunk is ki 1-et. Rendre ezt kapjuk:

$x = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{63} = 1 + 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{63} - 1 = 2 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{63} - 1 =$
$= 4 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^{63} - 1 = 4 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^{63} - 1 = \ldots$ és végül azt kapjuk, hogy
$x = 2^{63} + 2^{63} - 1 = 2 \cdot 2^{63} - 1 = 2^{64} - 1$.

Egy másik megoldás- ugyancsak ***teveszabállyal***- az, hogy az egész műveletet átírjuk a 2-es számrendszerbe, ott elvégezzük a műveletet, majd az eredményt visszaírjuk a 10-es számrendszerbe: $x = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{63} = \underbrace{\overline{111...11}_2}_{64-szer} = \underbrace{\overline{111...11}_2}_{64-szer} + 1 - 1 = \underbrace{\overline{100...0}_2}_{64 darab} - 1 = 2^{64} - 1.$

Tehát mindkét esetben $x = 2^{64} - 1$ = 18.446.744.073.709.551.615 búzaszem adódik! azaz 18 trillió 446 744 billió 73 709 millió 551 ezer 615 búzaszemet kellene Sessa ebn Dahernek adniuk, olyan hatalmas mennyiségű gabonát, amellyel 9 mm vastagon beboríthatnák az egész földgolyót. Tehát a találmány valóban megfizethetetlen.

Ez az alkalmazott ötlet, amilyen egyszerű, olyan nagyszerű, mert a matematikában a feladatok megoldása során nagyon sokszor alkalmazzuk azt, hogy egy adott kifejezéshez hozzáadjuk és kivonjuk ugyanazt a mennyiséget (vagy fordított sorrendben). Ezt az egyszerű eljárást hívják ***teveszabálynak*** ☺.

A továbbiakban egy egész „csokor” olyan feladatot mutatunk be, amelyet a ***teveszabály*** nélkül talán meg sem tudnánk oldani! Ezek a típusú feladatok a matematika minden területén, és az 5.-12. osztályos matematikai tevékenység során mindenütt fellelhetők.

2. feladat:

Miért nem lehet az $a = 1234^{5678} + 8765^{4321}$ szám prímszám?
Megoldás: Hozzunk máris a tevét ☺ , vagyis adjunk hozzá 1-et és vonjunk is ki 1-et:
$a = 1234^{5678} + 8765^{4321} + 1 - 1 = 1234^{5678} - 1 + 8765^{4321} + 1$. Mivel $x^n - y^n = M(x - y)$, ezért $1234^{5678} - 1 = M(1234 - 1) = M1233 = M9$, és mivel $x^{2n+1} + y^{2n+1} = M(x + y)$, ezért $8765^{4321} + 1 = M(8765 + 1) = M8766 = M9$, tehát $a = M9$.

3. feladat:

Ha $a, n \in N^* - \{1\}$ igazoljuk, hogy $\left(a^n - 1\right) \vdots (a-1)^2 \Leftrightarrow n \vdots \left(a - 1\right)$.
Megoldás: Írjuk fel a következőket:
$a^n - 1 = \left(a - 1\right) \cdot \left(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a + 1\right)$ és nyilvánvalóan $(a^n - 1) \vdots \left(a - 1\right)$. Elegendő és szükséges is igazolni, hogy $\left(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a + 1\right) \vdots (a - 1)$ Most egy egész tevekaravánra lesz szükségünk ☺ ! Felírhatók a következők:
$a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a + 1 = (a^{n-1} - 1) + (a^{n-2} - 1) + (a^{n-3} - 1) + ... + (a - 1) + (1 - 1) + n \cdot 1 =$

$= M(a-1)+M(a-1)+M(a-1)+...+M(a-1)+n = M(a-1)+n$, tehát
$\left(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+...+a+1\right)\vdots(a-1) \Leftrightarrow n\vdots(a-1)$.

4. feladat:

Határozzuk meg azokat a *p, q* pozitív egész számokat amelyekre az $a = 4^p + 6^q$ osztható 10-el.
Megoldás: *a*= páros, ezért máris osztható 2-vel. Továbbá az $x^n - y^n = M(x-y)$ összefüggésben az *x*= *a*+*b* és *y*= *b* választással $(a+b)^n = Ma + b^n$ minden $a, b \in N$ esetén. Ekkor $6^p = (6-1+1)^p = (5+1)^p = M5+1$, és hasonlóan felírható, hogy $4^p = (4+1-1)^p = (5-1)^p = M5+(-1)^p$, tehát $a = M5+(-1)^p+1$ és ez csakis akkor többszöröse 5-nek, ha p páros szám, q pedig tetszőleges pozitív egész szám.

5. feladat:

Igazoljuk, hogy az $E = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ szám osztható 7-tel.
Megoldás: Ezúttal egy teve nem is lesz elég ☺ ! Nézzük a következőket:
$E = 2222^{5555} + 5555^{2222} = 2222^{5555} + 4^{5555} - 4^{5555} + 5555^{2222} + 4^{2222} - 4^{2222} =$
$= (2222^{5555} + 4^{5555}) + (5555^{2222} - 4^{2222}) - (4^{5555} - 4^{2222}) = a + b - c$. Látható, hogy
$a = 2222^{5555} + 4^{5555} = M(222+4) = M2226 = M7$, továbbá
$b = 5555^{2222} - 4^{2222} = M(5555-4) = M5551 = M7$, valamint
$c = 4^{5555} - 4^{2222} = 4^{2222}(4^{3333}-1) = 4^{2222}(64^{1111}-1) = M(64-1) = M7$, tehát $A = a+b-c = M7$.

6. feladat:

Igazoljuk, hogy az 10101 szám minden számrendszerben osztható 111-el!
Megoldás: Mivel $\overline{10101}_x = x^4 + x^2 + 1$ és $\overline{111}_x = x^2 + x + 1$, ezért azt kellene igazolni, hogy $x^4 + x^2 + 1 \vdots x^2 + x + 1$. Nos, most van szükség a tevére ☺ ! Felírhatjuk, hogy:
$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

7. Feladat:

Miért nem lehet az $n^4 + 64$ szám prímszám, egyetlen $n \in N$ esetén sem?
Megoldás: Máris hozzuk a tevét ☺ ! Felírható, hogy:
$n^4 + 16 = n^4 + 64 + 16n^2 - 16n^2 = (n^2+8)^2 - (4n)^2 = (n^2+4n+8)(n^2-4n+8)$ és az egyik szorzótényező sem egyenlő 1-gyel.

8. feladat:

Írjuk fel a következő halmazt: $A = \left\{ x \in N \middle| x = \dfrac{4n}{n+2}, n \in N \right\}$.

Megoldás: Újból szükségünk van a tevére ☺ ! Felírható, hogy:
$x = \dfrac{4n}{n+2} = \dfrac{4n+8-8}{n+2} = 4 - \dfrac{8}{n+2} \in N$, ha $n+2 \in \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8\}$ ahonnan a természetes számok: $n \in \{0, 2, 6\}$, tehát $A = \{0, 3, 4\}$.

9. feladat:

Számítsuk ki az $S = 1\cdot1! + 2\cdot2! + ... + n\cdot n! = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$ összeget, ha $n \in N$.

Megoldás: Megint szükségünk van az 1 tevére ☺ ! Mivel
$k \cdot k! = (k+1-1)k! = (k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$, ezért
$S = (2!-1!) + (3!-2!) + ... + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1$

Megjegyzés: Teljesen hasonlóan számolható ki a következő összeg is: $S = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$.

10. feladat:

Igazoljuk, hogy minden x, y valós számra igaz, hogy $\left||x|-|y|\right| \le |x-y|$.

Megoldás: Bizonyítani kell tehát, hogy $-|x-y| \le |x|-|y| \le |x-y|$, vagyis $|x| \le |x-y|+|y|$ (1) és $|y| \le |x|+|x-y|$ (2). És máris hozzuk a tevéket ☺! A háromszög egyenlőtlensége alapján felírható, hogy: $|x| = |(x+y)-y| \le |x-y|+|y|$, illetve $|y| = |(y-x)+x| \le |x|+|x-y|$, ezzel az (1) és a (2) bizonyított.

11. feladat:

Legyen az $(a_n)_{n\ge1}, (b_n)_{n\ge1}$ két olyan valós számokból álló sorozat, amelyre $|a_{n+1}-a_n| \le b_{n+1}-b_n$ $\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}^*$ esetén. Igazoljuk, hogy akkor minden $n,k \in N^*$ esetén igaz, hogy $|a_{n+k}-a_n| \le |b_{n+k}-b_n|$.

Megoldás: Hát ezúttal egy egész tevekaravánt kell hoznunk ☺ ! Ugyancsak a háromszög egyenlőtlensége alapján felírható, hogy:

$$|a_{n+k}-a_n| = |(a_{n+k}-a_{n+k-1})+(a_{n+k-1}-a_{n+k-2})+(a_{n+k-2}-a_{n+k-3})+\ldots+(a_{n+1}-a_n)| \le$$

$$\le |a_{n+k}-a_{n+k-1}|+|a_{n+k-1}-a_{n+k-2}|+|a_{n+k-2}-a_{n+k-3}|+\ldots+|a_{n+1}-a_n| \le$$

$$\le (b_{n+k}-b_{n+k-1})+(b_{n+k-1}-b_{n+k-2})+(b_{n+k-2}-b_{n+k-3})+\ldots+(a_{n+1}-a_n) = b_{n+k}-b_n \le |b_{n+k}-b_n|.$$

12. feladat:

Hozzuk kanonikus alakra az $f(x) = ax^2+bx+c,\ f: R \to R$ másodfokú függvényt, ahol *a, b, c* valós számok, és *a* nem nulla.

Megoldás: Most is szükségünk lesz egy furcsa tevére ☺ ! Megpróbálunk erőltetve is teljes négyzetet kialakítani:

$$f(x) = ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right) = = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \text{ ahol } \Delta = b^2-4ac\ .$$

13. feladat:

Egyszerűsítsük le a következő törtet: $T = \dfrac{\sin 2x}{\sin x+\cos x+1}$.

Megoldás: Ezúttal eléggé álcázott tevére lesz szükség ☺ ! Rendre felírható, hogy:

$$\sin 2x = \sin 2x+1-1 = 2\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x-1 = (\sin x+\cos x)^2-1 =$$

$$= (\sin x+\cos x)^2-1 = (\sin x+\cos x+1)\cdot(\sin x+\cos x-1). \text{ Tehát}$$

$$T = \frac{(\sin x+\cos x+1)\cdot(\sin x+\cos x-1)}{\sin x+\cos x+1} = \sin x+\cos x-1.$$

14. feladat:

Legyen $(x_n)_{n\ge1}$ pozitív számokból álló sorozat. Igazoljuk, hogy

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)} < 1.$$

Megoldás: Máris hozzuk a tevét ☺ ! Felírható, hogy

$$\frac{x_k}{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k)} = \frac{x_k+1-1}{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k)} =$$

$$= \frac{1+x_k}{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k)} - \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k)} =$$

$$= \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_{k-1})} - \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k)} = a_{k-1} - a_k$$. Ezért

$$S = 1 - \frac{1}{1+x_1} + \sum_{k=2}^{n}(a_{k-1} - a_k) = 1 - a_n = 1 - \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)} < 1.$$

15. feladat:

Az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számokból álló számsorozat teljesíti a következő rekurziós összefüggést: $x_{n+1} = 2x_n + 1$ és $x_1 = \alpha > 0$. Keressük meg az általános tagot megadó képletet.

Megoldás: Megint szükségünk van a tevére ☺ ! Végezzük el a következő műveleteket: $x_{n+1} = 2x_n + 1 \Leftrightarrow x_{n+1} = 2(x_n + 1 - 1) + 1 \Leftrightarrow x_{n+1} = 2(x_n + 1) - 1 \Leftrightarrow x_{n+1} + 1 = 2(x_n + 1)$. Vezessük be most az $x_k + 1 = y_k$ jelölést minden $k \in N^*$ esetén. Ekkor $x_{n+1} + 1 = 2(x_n + 1) \Leftrightarrow y_{n+1} = 2y_n$ ahonnan $\frac{y_{k+1}}{y_k} = 2$, ezért $\prod_{k=1}^{n-1}\frac{y_{k+1}}{y_k} = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \Leftrightarrow \frac{y_n}{y_1} = 2^{n-1} \Leftrightarrow y_n = y_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow x_n + 1 = (x_1 + 1)\cdot 2^{n-1}$, ahonnan $x_n = (\alpha + 1)\cdot 2^{n-1} - 1$ minden $n \in N^*$ esetén.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a teveszabállyal az $x_{n+1} = ax_n + b;\ a,b \in R^*, a \neq 1$ általánosabb alakú elsőrendű lineáris rekurzió általános képlete is meghatározható, ha úgy keressük az α valós számot, hogy $x_{n+1} + \alpha = a(x_n + \alpha)$ legyen, ahonnan $\alpha = \frac{b}{a-1}$.

16. feladat:

Számítsuk ki a következő határértéket: $L = \lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

Megoldás: A feladat alig ha oldható meg teveszabály nélkül, és a teve választás sem könnyű ! Mivel $\sin(x+\pi) = -\sin x$, ezért felírható, hogy: $L = \lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi + n\pi\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi(\sqrt{n^2+n} - n)\right) = \lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n)}\right) = \lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

17. feladat:

Számítsuk ki a következő határértéket: $L = \lim_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$.

Megoldás: Most nagyon jól felhasználható az, hogy a teve jön is, meg megy is ☺ !
Rendre felírható, hogy:

$$L = \lim_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) = \lim_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2} + 1 - 1) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left[(\sqrt[n]{3} - 1) - (\sqrt[n]{2} - 1)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{3} - 1) - \lim_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{2} - 1) = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

18. feladat:

Számítsuk ki a következő határértéket: $L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{2}}{2}\right)^n$.

Megoldás: Teve nélkül nem is indíthatjuk el a feladatmegoldás ☺ ! A feladatot az ***e***-számra kell visszavezetni:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}}{2}-1\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}-2}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}-2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}-2}}\right]^{n\frac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}-2}{2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}-2}{2}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3}-1)+\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)}=e^{\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 2}=e^{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}=e^{\ln\sqrt{3.2}}=\sqrt{6}\,.$$

Megjegyzés: Majdnem minden e-számmal megoldható feladatnál alkalmaznunk kell a teveszabályt, ugyanis mindig egy 1-essel kell kezdődjön a képlet, ezért kell hozzáadni majd kivonni 1-et.

19. feladat:

A l'Hospital szabály nélkül számítsuk ki: $L=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$

Megoldás: Itt is egy tevére lesz szükség ☺ ! Figyelembe véve, hogy $\sin(x+\pi)=-\sin x$ felírható, hogy: $L=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x-\pi+\pi)}{x-1}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\pi(x-1))}{x-1}=-\pi$.

20. feladat:

Számítsuk ki a következő határértéket: $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}$.

Megoldás: Megint jól átgondolt tevére lesz szükség ☺ ! Rendre felírhatjuk, hogy:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x+\cos x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)-\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}.$$

21. feladat:

Vezessük le a tört deriválási szabályát, vagyis a következő képletet:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Megoldás: Nagyon nagy szükségünk van egy jó tevére ☺ ! Rendre felírható, hogy:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)\right]=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

22. feladat:

Számítsuk ki a következő integrált: $I=\int\frac{3x^2-2}{4x^2+1}dx$

Megoldás: Felírhatjuk, hogy:

$I = \int \frac{3x^2-2}{4x^2+1}dx = \int \frac{3x^2}{4x^2+1}dx - \int \frac{2}{4x^2+1}dx = 3\int \frac{x^2}{4x^2+1}dx - 2\int \frac{1}{4x^2+1}dx = 3I_1 - 2I_2$. Most az első integrálban egy jól választott tevére van szükség ☺ !

$$I_1 = \int \frac{x^2}{4x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^2}{4x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^2+1-1}{4x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^2+1}{4x^2+1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{4x^2+1}dx =$$

$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{4x^2+1}dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}I_2$. Tehát

$$I = 3I_1 - 2I_2 = \frac{3x}{4} - \frac{11}{2}\int \frac{1}{4x^2+1}dx = \frac{3x}{4} - \frac{11}{8}arctg(2x) + C$$

23. feladat:

Számítsuk ki a következő integrált: $I = \int \frac{x}{x^2+2x+2}dx$

Megoldás: Vegyük észre, hogy az integrál alatti függvény már elemi tört, tehát nem lehet tovább bontani. Valami mást kell csinálnunk. Éspedig figyeljük meg, hogy $(x^2+2x+2)' = 2x+2$. Ebből kifolyólag szükségünk van egy életmentő tevére ☺ ! Felírható, hogy: $I = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+2x+2}dx =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) - arctg(x+1) + C$.

Ezzel befejezzük a példázódást, azzal a reménnyel, hogy a kiválasztott feladatok kellően sokszínűek, változatosak, érdekesek és tanulságosak voltak. Továbbá elgondolkozhatunk azon, hogy amíg a teve bekötése, a számolások elvégzése és a teve elvitele a feladatnak egy hibás megoldásához vezetett, addig a megoldott feladatok során ugyanazon mennyiség hozzáadása, és elvétele mégis helyes matematikai számításokhoz vezetett. Érdekes, nem de?