POLYGON
XXII/1–2. szám, 2014. máj.

EGY ÖTLET

A Venn-diagram és a logikai szita alkalmazásai

Tuzson Zoltán

Az ábráknak nemcsak a geometriában van fontos szerepük, hanem a legkülönbözőbb feladatok megoldásában is segíthetik a kiindulási adatok elrendezését, összefüggések felismerését, megkönnyíthetik a feltárt összefüggések későbbi felidézését és ellenőrzését.

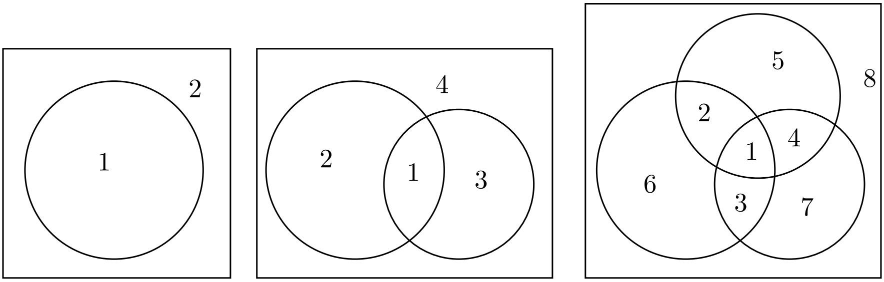
A matematika különböző területein már régóta használatosak az úgynevezett *Venn-diagramok*, a halmazok közötti kapcsolatok, viszonyok szemléltetésére, adott tulajdonsággal rendelkező halmazok és azok számosságának (elemei számának) meghatározására, valamint egyes állítások logikai értékének megállapítására, logikai következtetések vizsgálatára (ezért is nevezik ezeket még halmazábráknak is).

Egy Venn-diagramot körökkel, vagy más zárt görbékkel, vagy ennél általánosabb alakzatokkal, például n egyszerű zárt görbével adunk meg a síkon. Minden görbe belseje valamilyen halmazt ábrázol, a zárt görbén kívül eső rész pedig annak komplementerét.

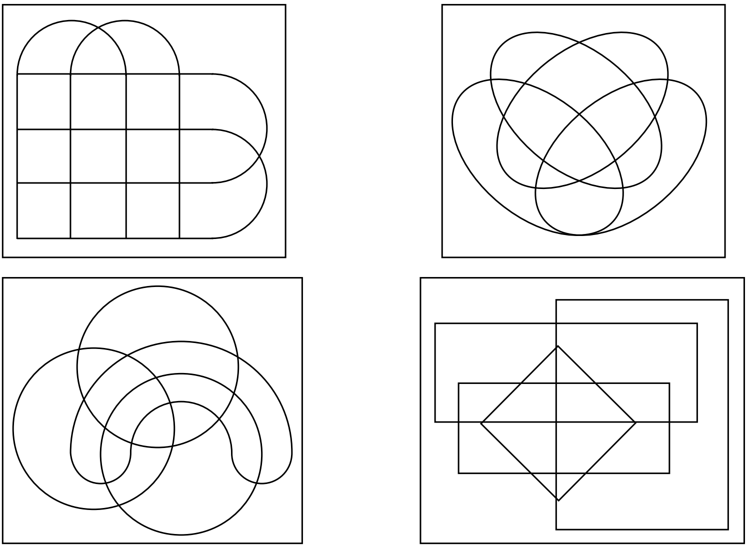
Az $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ görbecsaládot *Venn-diagramnak* nevezzük, ha a görbék a síkot pontosan 2^n diszjunkt tartományra bontják, és a tartományok megegyeznek az összes lehetséges $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_k$ alakú halmazzal, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, ahol minden X_i helyére az A_i egyszerű, zárt görbe belsejét vagy külsejét írhatjuk, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

A körvonalakról az egyszerű zárt görbékre történő általánosítás okára nyomban rávilágít az alábbi észrevétel, mely már Venn 1880-as dolgozatában megtalálható: *Bármely diagramban legfeljebb három körvonal fordulhat elő.*

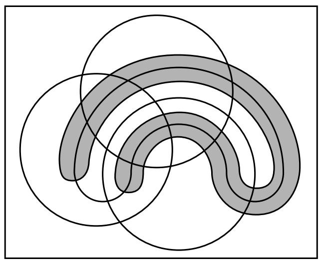
A bizonyítás lényege: n darab körvonal a síkot legfeljebb $n^2 - n + 2$ részre osztja (v.ö.[1]). Ezért a Venn-diagram értelmezése alapján következik: $n \leq 3$. Az $n = 1$, $n = 2$ és $n = 3$ eseteknek megfelelő diagramok a síkot rendre 2^1, 2^2, 2^3 részre osztják, lásd a következő ábrákat:



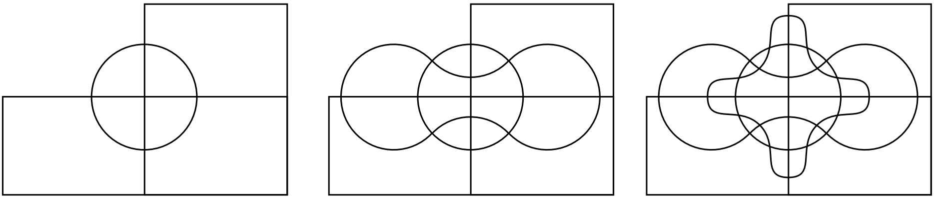
Másfajta görbékkel bármely n értékre lehet n görbét tartalmazó Venn-diagramot készíteni (lásd ugyanott). A probléma ellenben ott van, hogy az $n > 3$ szám növekedésével az ábrák egyre bonyolultabbak, nehezen használhatók feladatok megoldására. Nézzünk néhányat $n = 4$ esetén:



Mind a négy ábra a síkot 16 diszjunk tartományra osztja, mind a négy eset általánosítható $n > 4$ esetén is, a második talán a legegyszerűbb és a legközelebb áll a körrel alkotott diagramokhoz, hiszen ez ellipszisekkel készült. A harmadik a „kifli” alak miatt általánosítható $n > 4$-re, a mellékelt ábrán látható az $n = 5$ eset. A negyediket téglalapokból készítettük.



Említésre méltók Edwards konstrukciói, aki a Venn-diagramot gömbfelszínen készíti el, majd kivetíti a síkba. Az első három halmazt három egymást metsző főkör határolja, a negyediké meg úgy kanyarog, mint teniszlabdán a varrat. A visszavetítés után fogaskerék alakú halmazok keletkeznek, ahol minden egyes további halmaznak egyre több foga van. Íme néhány konstrukció (v.ö. [2]):



Könnyen belátható, hogy $n > 3$ esetén az egyes tartományok azonosítása már körülményes.

Az elkövetkezőkben bemutatjuk e diagramok néhány alkalmazási lehetőségét. Egyik azonnali alkalmazását az úgynevezett logikai szita-formulák képezik.

A továbbiakban jelölje $|X|$ az X halmaz elemeinek a számát (számosságát). A kétkörös Venn diagram segítségével látjuk, hogy ha két halmaz elemszámát összeadjuk, akkor a metszet elemeit kétszer számoljuk, így az unió elemszámára kapjuk, hogy

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1}$$

Továbbá, ha $X \subset S$, akkor nyilvánvaló, hogy $|S - X| = |S| - |X|$, és most az $X = A \cup B$ választással, az $A, B \subset S$ feltételekkel, az (1) alapján kapjuk, hogy

$$|S - (A \cup B)| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|. \tag{1'}$$

Az (1) és (1′) összefüggéseket másodrendű szita-formulának hívjuk (a logikai szitára még használatos a tartalmazás-kizárás formula elnevezés is).

Hasonló összefüggést állapíthatunk meg három halmaz esetén is, ha a három körös Venn-diagramot követjük. Ez alapján felírható, hogy

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|. \tag{2}$$

Az előbbiek mintájára, az $A, B, C \subset S$ feltételek mellett levezethető a következő összefüggés is:

$$|S-(A\cup B\cup C)| = |S|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|-|A\cap B\cap C|. \tag{2'}$$

A (2) és a (2′) képezik a harmadrendű szita-formulákat. Természetesen a szita-formula érvényes marad háromnál több tag esetén is. Ennek az általános alakja:

$$\tag{3} \begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ + \cdots + (-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \end{aligned}$$

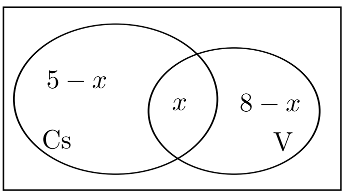
és továbbá

$$\tag{3'} \begin{aligned} \left|S - \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| \\ - \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n+2}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \end{aligned}$$

A (3) és a (3′) n-ed rendű szita-formulákat például teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

A továbbiakban olyan alkalmazásokat mutatunk be, amelyeknek a megoldása Venn-diagrammal és a szita-formulával egyaránt elvégezhetők, de mutatunk olyan feladatokat is, amelyeknél az egyik vagy a másik módszer előnyösebb.

1. feladat. Egy fagyisnál csoki és vanília fagyiból lehet választani. A fagyisnál 11-en állnak sorban, közülük 5-en kértek csokis fagyit. Vaníliát 3-mal többen kértek mint csak csokist. Hányan kértek csoki és vanília fagyit is?



Megoldás. Jelölje Cs azok halmazát, akik csoki, V azokét, akik vanília fagyit vásároltak. Készítsük el a mellékelt ábrán látható Venn-diagramot. Legyen $x = |\mathrm{Cs} \cap \mathrm{V}|$, akkor $|\mathrm{Cs} - \mathrm{V}| = 5-x$ és $|\mathrm{V} - \mathrm{Cs}| = 8-x$, ezért az $(5-x)+x+(8-x) = 11$ egyenletből $x = 2$. Tehát ketten kértek csoki és vanília fagyit is.

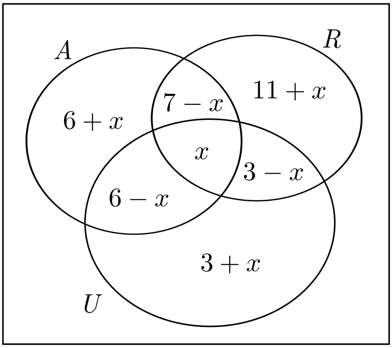
2. feladat. Hányféle képpen alakíthatunk ki 6 betűs szavakat az **a, e, m, o, u, y** betűkkel úgy, hogy ne tartalmazzák a **me** és **you** szavakat?

Megoldás. Legyenek

$$S = \text{az összes szó},$$
$$A = \text{a } \mathbf{me}\text{-t tartalmazó szavak},$$
$$B = \text{a } \mathbf{you}\text{-t tartalmazó szavak}.$$

A szitaképlet: $|S-(A\cup B)| = |S|-|A|-|B|+|A\cap B|$. De $|S| = 6!$, $|A| = 5!$ (mert „**me**, **a**, **o**, **u**, **y**" száma 5), $|B| = 4!$ (mert „**you**, **a**, **m**, **e**" száma 4), $|A\cap B| = 3!$ (mert a „**me**, **you**, **a**" száma 3). Tehát a válasz: $720-120-24+6 = 582$.

3. feladat. Az osztályban 38 tanuló van. Mindenki űzi a következő sportágak valamelyikét: atlétika, röplabda, úszás. 19-en atletizálnak, 21-en röplabdáznak, 12 tanuló úszik; 7 tanuló atletizál és röplabdázik, 6 tanuló atletizál és úszik, 3 tanuló röplabdázik és úszik. Hány tanuló űzi mindhárom sportot?



Megoldás. Legyen $|A\cap B\cap C| = x$ és bentről kifele haladva töltjük ki a halmazábrát, majd összegezzük a benne látható kifejezéseket:

$$(11+x)+(6+x)+(3+x)+(7-x)+(3-x)+(6-x)+x = 38 \;\Rightarrow\; x = 2$$

Szita-formulával is dolgozhatunk. Legyenek:

$$A = \{\text{atlétizálók}\},$$
$$R = \{\text{röplabdázók}\},$$
$$U = \{\text{úszók}\}.$$

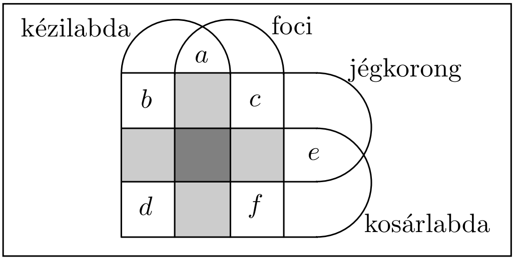
Tehát felírható, hogy:

$$|A\cup R\cup U| = |A|+|R|+|U|-|A\cap R|-|R\cap U|-|U\cap A|+|A\cap R\cap U|.$$

Beírva a számosságokat kapjuk, hogy: $38 = 19+21+12-7-3-6+|A\cap R\cap U|$, vagyis $|A\cap R\cap U| = 2$ tanuló űzi mindhárom sportot.

4. feladat. Egy 24-es létszámú sportosztály tanulói négy sportágban szerepelnek: kézilabdáznak, fociznak, jégkorongoznak és kosárlabdáznak. Minden tanuló sportol, de senki sem szerepel kettőnél több sportágban. Tudjuk, hogy 9-en nem kézilabdáznak, 11-en nem fociznak, 16-an nem jégkorongoznak, 12-en pedig nem kosárlabdáznak. Tudjuk még, hogy 10-en fociznak, de nem kosaraznak, 11-en pedig kézilabdáznak, de ők sem kosaraznak.

Hányan, és milyen összetételben űznek két-két sportágat?



Megoldás. A feltevésből azt kapjuk, hogy $24 - 9 = 15$-en kézilabdáznak, $24 - 11 = 13$-an fociznak, $24 - 16 = 8$-an jégkorongoznak, $24 - 12 = 12$-en pedig kosárlabdáznak. Mivel $15 + 13 + 8 + 12 = 48$, és ez az összes tanulók számának a 2-szerese, következik, hogy mindenki pontosan két sportágban vesz részt, mert senki sem szerepel 2-nél több sportágban. Az ábrán látható halmazok az egyes sportágakban szereplő tanulókat jelölik, a betűk pedig a két-két sportágat űzők számát jelentik, a következőképpen:

a – kézilabda-foci; b – kézilabda-jégkorong; c – foci-jégkorong;

d – kézilabda-kosárlabda; e – jégkorong-kosárlabda; f – foci-kosárlabda.

Ekkor

$$a + b + d = 15, \tag{1}$$

$$a + c + f = 13, \tag{2}$$

$$b + c + e = 8, \tag{3}$$

$$d + e + f = 12, \tag{4}$$

$$a + c = 10, \tag{5}$$

$$a + b = 11. \tag{6}$$

Az (1) és (6) egyenlőségből azt kapjuk, hogy $d = 4$, a (2) és (5) alapján $f = 3$, a (4) alapján $e = 5$. 12-en nem kosaraznak, tehát $a + b + c = 12$, de $a + c = 10$, így $b = 2$, (5)-ből és (6)-ból $a = 9$ és $c = 1$.

5. feladat. Ha $n = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^7$, akkor határozzuk meg a $\varphi(n)$-net, az n-nél kisebb és n-nel relatív prím számoknak a számát.

Megoldás. A keresett számok nem oszthatók se 2-vel, se 3-mal, se 5-tel. Ezek számát megkapjuk, ha a számok számából kivonjuk a 2; 3; 5 közül legalább eggyel oszthatók számát. Legyenek rendre

$$\begin{aligned} A &= \{k \in \mathbb{N} : k < n,\ 2 \mid k\}, \\ B &= \{k \in \mathbb{N} : k < n,\ 3 \mid k\}, \\ C &= \{k \in \mathbb{N} : k < n,\ 5 \mid k\}. \end{aligned}$$

Tehát az n prímtényezős alakját figyelembe véve, $|A| = n/2$, $|B| = n/3$, $|C| = n/5$, $|A \cap B| = n/6$, $|B \cap C| = n/15$, $|C \cap A| = n/10$ és $|A \cap B \cap C| = n/30$. A logikai szita alapján:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - |A \cup B \cup C| \\ &= n - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) - |A \cap B \cap C| \\ &= n - \frac{n}{2} - \frac{n}{3} - \frac{n}{5} + \frac{n}{6} + \frac{n}{10} + \frac{n}{15} - \frac{n}{30} \\ &= n\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} - \frac{1}{30}\right) = \\ &= n\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

Megjegyzés. Észrevehető, hogy az előbb kapott eljárás és eredmény általánosítható, ugyanis ha az n szám prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

6. feladat. (*Elcserélt levelek*) Hányféleképpen helyezhetünk el 4 különböző embernek írt levelet 4 nekik megcímzett borítékba úgy, hogy semelyik levél se a jó címzéshez kerüljön?

Megoldás. Legyen A_i azon esetek halmaza, amelyben az i-vel jelölt címzett ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) megkapja a levelet. Ekkor $|A_i| = 3!$, $|A_i \cap A_j| = 2!$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1!$, hiszen ha három levél jó helyre megy, akkor a negyedik is, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$.

A logikai szita alapján

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right| &= \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= C_4^1 \cdot 3! - C_4^2 \cdot 2! + C_4^3 \cdot 1! - C_4^4 = 4!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right). \end{aligned}$$

A kérdésre a válasz pedig:

$$a_4 = 4! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9.$$

Megjegyzés. Észrevehető, hogy az előbb kapott eljárás és eredmény általánosítható n boríték esetén is, amelyre a válasz

$$a_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

7. feladat. Határozzuk meg azokat a pozitív, egynél kisebb irreducibilis törteket, melyek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy a számlálójuk és a nevezőjük összege 2001.

Megoldás. Azon pozitív, egynél kisebb törteknek a száma amelyeknek a számlálójuk és a nevezőjük összege 2001, éppen 1000. Meg kell néznünk, hogy ezek közül hány irreducibilis. Ha $\frac{a}{b}$ egy ilyen tört, ahol $a < b$, $a + b = 2001$, legyen d egy közös osztója az a-nak és a b-nek. Ekkor $d \,|\, a + b = 2001$, ahonnan $d \in \{3, 23, 29\}$. Legyenek A, B, C rendre azon $\frac{a}{b}$ törteknek a halmaza amelyek rendre 3-mal, 23-mal, 29-cel egyszerűsíthetők. A logikai szita alapján:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|,$$

ahol $|A \cap B \cap C| = 0$, mert $3 \cdot 23 \cdot 29 = 2001$.

Ha $\frac{a}{b} \in A$, akkor $a = 3x$, $b = 3y$ és $3x + 3y = 2001$ vagyis $x + y = 667$ és $0 < x < y$ természetes számok. Ekkor $x \in \{1, 2, \ldots, 333\}$, így megkapjuk, hogy $|A| = 333$. Teljesen hasonló módon meghatározva a többi halmaz számosságát is kapjuk, hogy $|B| = 43$, $|C| = 34$, és $|A \cap B| = 14$, $|B \cap C| = 1$, $|C \cap A| = 11$. Így $|A \cup B \cup C| = 333 + 43 + 34 - 14 - 1 - 11 = 384$. Tehát az irreducibilis törtek száma $1000 - 384 = 616$.

8. feladat. Hányféleképpen tehetünk be 30 szál virágot 15 különböző színű vázába, ha a virágok különbözőek, és minden vázába kell jusson legalább egy virág.

Megoldás. Az összes lehetséges kiosztások halmazát jelöljük H-val, és legyen A_i azon kiosztások halmaza amelyeknél az i-dik váza üres marad, $1 \le i \le 15$. A jó kiosztások halmaza tehát $H - (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{15})$. Továbbá $|H| = 15^{30}$, $|A_i| = 14^{30}$ (függetlenül az i-től) hiszen virágonként 14-féle képpen dönthetünk (az i-edik váza üresen kell maradjon), $|A_i \cap A_j| = 13^{30}$ mert jelenleg két váza tiltott (az i-edik és a j-edik váza). Hasonlóképpen egy k-as metszetnek $(15 - k)^{30}$ eleme van (k váza tiltott). Általában k-as metszetből C_{15}^{k} darab van, ennyiféleképpen választhatjuk ki a 15 váza közül a k üreset. A szita-formula szerint tehát:

$$\left|H-(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_3)\right| = 15^{30}-\sum_{k=1}^{30}(-1)^k C_{15}^{k}\cdot(15-k)^{30} = \sum_{k=0}^{30}(-1)^k C_{15}^{k}\cdot(15-k)^{30}.$$

Megjegyzés. Észrevehető, hogy az előbb kapott eljárás és eredmény általánosítható p darab virágszál és q darab váza esetén is, amikor is a válasz

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k C_q^k\cdot(q-k)^p.$$

9. feladat. Hányféleképpen ültethetünk le egy sorba 3 angolt, 3 franciát és 3 törököt úgy, hogy három azonos nemzetiségű ne üljön egymás mellé?

Megoldás. A logikai szita formulát alkalmazzuk három halmaz esetén. Legyen

$$\begin{aligned} A &= \text{a 3 angol egymás mellet ül}\\ F &= \text{a 3 francia egymás mellet ül}\\ T &= \text{a 3 török egymás mellet ül} \end{aligned}$$

Összes ültetési lehetőségek: $9!$. $|A|=|F|=|T|=7!\cdot 3!$, $|A\cap F|=|A\cap T|=|F\cap T|=5!\cdot 3!\cdot 3!$, $|A\cap F\cap T|=3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!$. Így az

$$|S-(A\cup B\cup C)| = |S|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|-|A\cap B\cap C|$$

szitaképlet alapján a kért érték:

$$9!-C_3^1\cdot 7!\cdot 3!+C_3^2\cdot 5!\cdot 3!\cdot 3!-C_3^3\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!.$$

Megjegyzés. Észrevehető, hogy az előbb kapott eljárás és eredmény általánosítható, ha 3–3–3 személy helyett k–k–k személyt veszünk, akkor az eredmény:

$$(3k)!-C_3^1\cdot(2k+1)!\cdot k!+C_3^2\cdot(k+2)!\cdot k!\cdot k!-C_3^3\cdot k!\cdot k!\cdot k!\cdot k!.$$

Ha pedig a 3 csoport helyett p csoportot tekintünk, akkor az eredmény:

$$(pk)!-C_p^1\cdot((p-1)k+1)!\cdot k!+C_p^2\cdot((p-2)k+2)!\cdot k!\cdot k!-\cdots+(-1)^p C_p^p\underbrace{k!\cdot k!\cdots k!}_{(k+1)-tag}$$

10. feladat. 4 házaspár hogyan helyezhető el egy kerek asztal körül úgy, hogy házastársak nem kerülnek egymás mellé.

Megoldás. A logikai szita-formulát alkalmazzuk négy halmaz esetén. Az A_i , $1 \leq i \leq 4$ halmazba azok a (számunkra nem kedvező) esetek kerülnek, amelyekben az i-edik férj és feleség egymás mellett ülnek. Az összes eset száma 7!. Ha egy házaspár egymás mellett ül (a többi lehet, hogy egymás mellett ül, lehet, hogy nem), akkor az egymás mellett ülő pár C_4^1-féle képpen választható ki, a pár és a többi 6 ember a kerek asztal körül 6!-féleképpen ülhet le, és a pár egymáshoz képest kétféleképpen helyezkedhet el, tehát ezeknek az eseteknek a száma $C_4^1 \cdot 6! \cdot 2$ A többi eset hasonló módon számolható ki. Az összes esetek száma tehát:

$$7! - C_4^1 \cdot 6! \cdot 2 + C_4^2 \cdot 5! \cdot 2^2 - C_4^3 \cdot 4! \cdot 2^3 + C_4^4 \cdot 3! \cdot 2.$$

Megjegyzés. Észrevehető, hogy az előbb kapott eljárás és eredmény általánosítható a 4 helyett k házaspárra, amikor az eredmény a következő lesz:

$$\begin{aligned} &(2k)! - C_k^1 \cdot (2k-1)! \cdot 2 + C_k^2 \cdot (2k-2)! \cdot 2^2 - \cdots \\ &\quad + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} \cdot (k+1)! \cdot 2^{k-1} + (-1)^k C_k^k \cdot k! \cdot 2^k \end{aligned}$$

Befejezésül megjegyezzük, hogy még sok más egyszerűbb vagy nehezebb feladat megoldható a bemutatott módszerekkel.

Szakirodalom

[1] A Matematika Tanítása, 3/1983.
[2] http://hu.wikipedia.org/wiki/Venn-diagram
[3] Tuzson Zoltán, *Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat*, Ábel kiadó, Kolozsvár, 2011.
[4] Tuzson Zoltán, A Venn-Euler diagram felhasználása halmazelméleti feladatok megoldására, ML 5/1994, 174.-178.
[5] Dumitru Busneag, Ioan Maftei, Teme pentru cercurile se concursurile de matematica ale elevilor, Scrisul Romanesc, Craiova, 1983
[6] Király Balázs, Tóth László, *Kombinatorika jegyzet és feladatgyűjtemény*, Pécsi Tudományegyetem, 2011.
[7] Láng Csabáné, *Kombinatorika*, ELTE, Budapest 2008.
[8] Szabó László, *Diszkrét matematika*, Sopron, 2011.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely