Az A:1653. feladat általánosítása

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A **MatLap 3/2006**-os számában megjelent **A:1653**. számú feladat a következő: „*Válasszunk az 1, 2, 3, 4, …, 2006 számoknak „+” vagy „-” előjelt úgy, hogy a* $|\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 2006|$ *szám a lehető legkisebb legyen!*”

Mivel hasonló típusú feladatok más szakfolyóíratokban, könyvekben , versenyeken is előfordulnak, ezért érdemesnek láttuk, hogy a tanulók megismerkedjenek ezen feladattípusok hátterével is, hiszen az alapötletet változtatva, számos hasonló, vagy rokon feladat szerkeszthető.

Vizsgáljuk meg hát a szóbanforgó feladat általánosítását!

Feladat: Adott n pozitív egész szám esetén, válasszunk az 1, 2, 3, 4, …, n számoknak „+” vagy „-” előjelt úgy, hogy az $\mathbf{S_n}=|\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm n|$ szám a lehető legkisebb legyen!

Megoldás: Próbálkozzunk sorra az n természetes szám legkisebb értékeivel: ± 1 esetén +1=1, $\pm 1 \pm 2$ esetén -1+2=1, $\pm 1 \pm 2 \pm 3$ esetén 1+2-3=0, $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4$ esetén 1-2-3+4=0, $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 = (\pm 1 \pm 3 \pm 5) + (\pm 2 \pm 4)$ = páratlan+páros $\neq 0$, de 1+2-3-4+5=1, $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6 = (\pm 1 \pm 3 \pm 5) + (\pm 2 \pm 4 \pm 6)$= páratlan + páros $\neq 0$ de -1+2+3-4-5+6=1.

Látható, hogy egyes esetekben az $\mathbf{S_n}$ összeg legkisebb értéke 1, más esetekben 0.

Természetesen merül fel a kérdés: milyen n pozitív egész számok esetén létezik a számoknak olyan „+” és „-” előjeles megválasztása amelyre a szóbanforgó kifejezés 0, és mikor 1?

Az előző kísérletezéseink alapján belátható, hogy a válasz az n alakjától függ, pontosabban n= 1, n= 2, n= 5, n= 6 esetekben az $\mathbf{S_n}$ legkisebb értéke 1, míg az n= 3, n= 4, és belátható módon n= 7 esetekben az $\mathbf{S_n}$ legkisebb értéke 0.

Ebből kifolyólag, könnyen rájöhetünk arra, hogy a vizsgálatok során lényegesen meg kell különböztetnünk azokat az eseteket, amikor **n** rendre **4k, 4k+1, 4k+2 és 4k+3** alakok valamelyike (**k**$\in$ N). Továbbá megfigyelhető egy úgynevezett „invariáns” ami a feladatok megoldásának a kulcsát jelentette: **a-(a+1)-(a+2)+(a+3)=0** , bármely **a** szám esetén. Erre alapozva az alábbiakat bizonyíthatjuk:

(1) Ha **n = 4k** alakú és k pozitív egész szám, akkor:

$$|(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\ldots+((4k-3)-(4k-2)-(4k-1)-4k))| = 0$$

(2) Ha **n = 4k+1** alakú és k nemnegatív egész szám, akkor:

$|(\pm 1 \pm 3 \pm \ldots \pm (4k+1))+(\pm 2 \pm 4 \pm \ldots \pm 4k)| = (2k+1)\times$páratlan + $2k\times$páros $\neq 0$, ellenben $|1+(2-3-4+5)+\ldots+((4k-2)-(4k-1)-4k+(4k+1))| = 1$.

(3) Ha $\mathbf{n = 4k+2}$ alakú és k nemnegatív egész szám, akkor:

$|(\pm 1 \pm 3 \pm \ldots \pm (4k+1)) + (\pm 2 \pm 4 \pm \ldots \pm 4k \pm (4k+2))| = (2k+1)\times$páratlan $+ (2k+1)\times$páros $\neq 0$,

ellenben az előbbiekhez hasonlóan felírható, hogy:

$|-1+2+(3-4-5+6)+(7-8-9+10)+\ldots+((4k-1)-4k-(4k+1)+(4k+2))| = 1$.

(4) Ha $\mathbf{n = 4k+3}$ alakú és k nemnegatív egész szám, akkor:

$|(1+2-3)+(4-5-6+7)+\ldots+(4k-(4k+1)-(4k+2)+(4k+3))| = 0$.

A leírtak alapján a 4 esetet így összegezhetjük: $\mathbf{min\ S_n} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \mathbf{n = 4k} \text{ vagy } \mathbf{n = 4k+3} \\ 1 & \text{ha } \mathbf{n = 4k+1} \text{ vagy } \mathbf{n = 4k+2} \end{cases}$

Az 1, 2, 3, 4, …, n számoknak akkor és csakis akkor **van** olyan „+” vagy „-” előjeles megválasztása amelyre $\mathbf{S_n} = 0$, ha $\mathbf{n = 4k}$ vagy $\mathbf{n = 4k + 3}$ alakú. Az 1, 2, 3, 4, …, n számoknak akkor és csakis akkor **nincs** olyan „+” vagy „-” előjeles megválasztása amelyre $\mathbf{S_n} = 0$, ha $\mathbf{n = 4k +1}$ vagy $\mathbf{n = 4k + 2}$ alakú, ellenben van olyan előjeles megválasztása amelyre $\mathbf{S_n} = 1$.

Az **A:1653.** feladatesetén $\mathbf{n = 2006 = 4\times501+2}$, és így k=501, tehát az előző **(3)-**as esethez tartozik, miszerint $|(\pm 1 \pm 3 \pm \ldots \pm 2005)+(\pm 2 \pm 4 \pm \ldots \pm 2004 \pm 2006)| \neq 0$ hiszen az előjelek megválasztásától függetlenül $1003\times$páratlan $+ 1003\times$páros $\neq 0$. Ellenben az előjelek következő megválasztásával $|-1+2+(3-4-5+6)+(7-8-9+10)+\ldots+(2003-2004-2005+2006)| = 1$, és ez a lehető legkisebb érték

Az általánosított feladattal kapcsolatosan egy érdekes átfogalmazott feladat a következő: Határozzuk meg azon n természetes számokat, amelyekre az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ halmaz elemei feloszthatók két diszjunkt A és B halmazba úgy, hogy a két halmaz elemeinek az összege ugyanannyi legyen!

Az előbbiekben bizonyítottak értelmében könnyen belátható, hogy ez a felosztás akkor és csakis akkor valósítható meg, ha $\mathbf{n = 4k}$ vagy $\mathbf{n = 4k + 3}$ alakú!

Természetesen az érdeklődő Olvasó számos más rokon feladatot is szerkeszthet, amelyek megoldása éppen a fent leírtakra támaszkodik.