Tuzson Zoltán

Egy általánosított feladat térbeli analógja

1. Steiner egy tétele, amit alkalmazni fogunk, a következő:

Ha S az A_1, A_2, ..., A_n térbeli anyagi pontrendszer súlypontja, akkor a tér bármely M pontjára igaz a következő összefüggés:

$$\begin{aligned}&MA_1^2+MA_2^2+\ldots+MA_n^2=\\&=n\cdot MS^2+SA_1^2+SA_2^2+\ldots+SA_n^2,\end{aligned} \quad (n\geq 2) \quad (1)$$

Bizonyítás: A koordináta-geometria eszközeit használva, legyenek az A_i pontok koordinátái $A_i(x_i, y_i, z_i)$, bármely $i\in\overline{\{1,n\}}$ esetén.

Az általánosság csorbítása nélkül elhelyezhetjük a koordináta-rendszert úgy, hogy ennek O kezdőpontja pontosan egybeessen az S súlyponttal. Ekkor az S súlypont koordinátái:

$$S\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n},\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n},\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}z_i}{n}\right),$$

ahol az $O\equiv S$ feltétel miatt $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=$ $=\sum\limits_{i=1}^{n}z_i=0$, így ha az M változó pont koordinátái $M(x, y, z)$, akkor az $f_n(M)=MA_1^2+$ $+MA_2^2+\ldots+MA_n^2$ jelölés bevezetésével a bizonyítandó összefüggés így alakul:

$$\begin{aligned}f_n(M)&=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]=\\&=n\cdot(x^2+y^2+z^2)+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)=\\&\quad n\cdot MS^2+f_n(S),\end{aligned}$$

és ezzel bizonyításunk máris véget ért. (v.ö. [2].)

Megjegyzések:

1. A bizonyításból könnyen leolvasható, hogy bármely S középpontú, tetszőleges sugarú gömb bármely M pontjára az $f(M)$ összeg állandó, hiszen az $f(S)$ és az MS is állandó. Természetesen, ennek az állandónak értéke más-más a különböző sugarú gömbök esetén, de ugyanazon gömb bármely pontjára az állandó értéke ugyanaz.

2. A bizonyításból az is kiderül, hogy a tétel állítása, valamint az 1. megjegyzés igaz marad az A_1, A_2, ..., A_n síkbeli pontok esetén is, csupán itt, a gömb helyett körről van szó. Sőt mi több, a tétel és a megjegyzés kiterjeszthető tetszőleges m-dimenziójú euklideszi vektortérre is, így pl. $\mathbb{R}^m$-re is $(m\geq 2)$.

2. Az előző Steiner-tétel egy alkalmazása a következő:

Ha az S súlyponttal rendelkező síkbeli (vagy térbeli) A_1, A_2, ..., A_n pontrendszer olyan tulajdonságú, hogy létezik egy olyan S középpontú, R sugarú kör (gömb), amely mind az n ponton áthalad, továbbá, ha Q ennek a körnek (gömbnek) egy tetszőleges pontja, valamint P egy tetszőleges r sugarú, ugyancsak S középpontú kör (gömb) tetszőleges pontja, akkor:

$$\begin{aligned}\frac{f_n(P)}{f_n(Q)}&=\frac{PA_1^2+PA_2^2+\ldots+PA_n^2}{QA_1^2+QA_2^2+\ldots+QA_n^2}=\\&=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\end{aligned} \quad (2)$$

Bizonyítás: Ezúttal is feltételezzük, hogy $S \equiv O$. A tétel alapján

$$f_n(Q) = n \cdot OQ^2 + \sum_{i=1}^{n} OA_i^2 = \\ = n \cdot R^2 + n \cdot R^2 = 2 \cdot n \cdot R^2,$$

továbbá

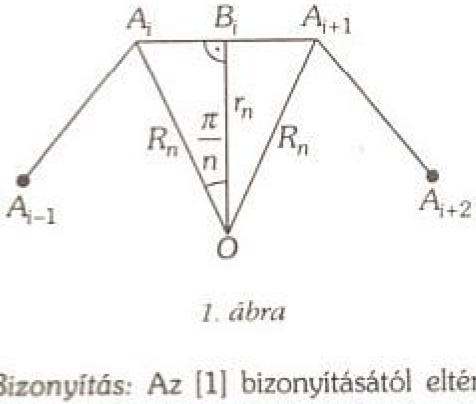
$$f_n(P) = n \cdot OP^2 + \sum_{i=1}^{n} OA_i^2 = \\ = n \cdot r^2 + n \cdot R^2 = n \cdot (R^2 + r^2).$$

Ez utóbbi két összefüggés arányából pontosan a (2) adódik.

3. Az általánosított feladat a következő (v.ö. [1]):

Ha egy szabályos n oldalú sokszög csúcsait A_1-, A_2-, ..., A_n-nel, beírt körének tetszőleges pontját P-vel, körülírt körének tetszőleges pontját Q-val jelöljük, akkor:

$$\frac{f_n(P)}{f_n(Q)} = \frac{PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2}{QA_1^2 + QA_2^2 + \ldots + QA_n^2} = \\ = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{n}\right) \qquad (3)$$



1. ábra

Bizonyítás: Az [1] bizonyításától eltérően, a (2)-es alkalmazás segítségével bizonyitunk, ami kiterjeszthető a térbeli analóg feladat bizonyítására is. Legyen B_i a szabályos sokszög O középpontjának, egyik tetszőleges A_iA_{i+1} oldalára eső merőleges vetülete. Az 1. ábra jelöléseit használva, OA_iB_i háromszögben $\cos A_iOB_i = \frac{OB_i}{OA_i}$, vagyis $\cos\frac{\pi}{n} = \frac{r_n}{R_n}$, ahol $r_n = OB_i$, $R_n = OA_i$ pontosan a szabályos n oldalú sokszög be- illetve köréirt kör sugara. Az $\frac{r_n}{R_n} = \cos\frac{\pi}{n}$ alapján a (2)-ből a (3) azonnal adódik.

4. Gondolatok a térbeli analóg feladat létezéséről

Sokak számára természetesen merülhet fel a következő kérdés: átvihető-e az általánosított feladat (3)-as összefüggése szabályos poliéderekre is? A kérdés megválaszolása előtt lássuk be, hogy a szabályos sokszögek térbeli analógjai a szabályos poliéderek.

Mindezek mellett szembeötlő az a tény, hogy amíg bármely $n \geq 3$ esetén létezik n oldalú szabályos sokszög, addig a térben csupán 5 szabályos poliéder van: a szabályos tetraéder, a hexaéder (kocka), az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder.

A „szűkítő analógia" egyik magyarázata talán az, hogy a szabályos sokszögek és a szabályos poliéderek definícióját nem ugyanazon axiómák adják, hanem csupán analóg elemek között analóg viszonyokkal (relációkkal) vannak definiálva.

(D_1) A szabályos sokszög olyan sokszög, amelynek minden oldala és minden szöge egybevágó (kongruens).

(D_2) A szabályos poliéder olyan poliéder, amelynek lapjai egybevágó szabályos sokszögek, lapszögei pedig egybevágóak.

Mindezek ellenére – Pólya György elmélete alapján – van okunk bízni az analóg tétel létezésében.

5. Az analóg feladat szabályos poliéderekre

Azt kell belátnunk, hogy mind az öt szabályos poliéder esetén, ha P a körülírt gömb, illetve Q a beírt gömb egy tetszőleges pontja, akkor az

$$\frac{f_n(P)}{f_n(Q)} = \frac{PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2}{QA_1^2 + QA_2^2 + \ldots + QA_n^2}$$

tört értéke csak a poliéder oldalainak számától függ.

Bizonyítás: A szabályos poliéderek csúcsainak száma szerint jelölje r_4, r_8, r_6, r_{20}, r_{12} illetve R_4, R_8, R_6, R_{20}, R_{12} rendre a szabályos tetraéder, hexaéder, oktaéder, dodekaéder és ikozaéder be- illetve körülírt gömbjeinek sugarait. Nyilván a beírt és a körülírt gömb középpontja egybeesik. Ha a szabályos poliéder élhosszát a-val jelöljük, akkor egyszerű számolással kiszámíthatók az r_4, R_4, r_8, R_8, r_6, R_6 értékei. Az r_{12}, R_{12} értékek kiszámolása valamivel hosszabb, az r_{20}, R_{20} kiszámolása pedig jóval terjedelmesebb. Éppen ezért, a szóban forgó sugarak kiszámolása végett a [3] enciklopédiát használtuk, ahol adott az egyes szabályos poliéderek teljes felszíne és térfogata. Így a térfogatfüggvény additivitásával kiszámíthatók a beírt gömbök sugarai, és a lapok köré írt körök sugaraiból Pitagorasztétellel a testek köré írt gömb sugara is. Számolásaink eredményét az alábbiakban fogalmazzuk meg.

(1) Szabályos tetraéderre:

$$r_4 = \frac{a\sqrt{6}}{12},\quad R_4 = \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

$$\frac{f_4(P)}{f_4(Q)} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{r_4}{R_4}\right)^2\right) = \frac{5}{9}.$$

(2) Hexaéderre (kockára):

$$r_8 = \frac{a}{2},\quad R_8 = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{f_8(P)}{f_8(Q)} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{r_8}{R_8}\right)^2\right) = \frac{2}{3}.$$

(3) Oktaéderre:

$$r_6 = \frac{a\sqrt{6}}{6},\quad R_6 = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{f_6(P)}{f_6(Q)} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{r_6}{R_6}\right)^2\right) = \frac{2}{3}.$$

(4) Dodekaéderre:

$$r_{20} = \frac{a\sqrt{10\cdot(25+11\sqrt{5})}}{15},$$

$$R_{20} = \frac{a\sqrt{10\cdot(145+53\sqrt{5})}}{30},$$

$$\frac{f_{20}(P)}{f_{20}(Q)} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{r_{20}}{R_{20}}\right)^2\right) = $$

$$= \frac{6123+2705\cdot\sqrt{5}}{1196}.$$

(5) Ikozaéderre:

$$r_{12} = \frac{a\cdot\sqrt{3}\cdot(3+\sqrt{5})}{12},$$

$$R_{12} = \frac{a\cdot\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4},$$

$$\frac{f_{12}(P)}{f_{12}(Q)} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{r_{12}}{R_{12}}\right)^2\right) = \frac{10-\sqrt{5}}{15}.$$

Tehát – akárcsak a szabályos sokszögek esetén – az $\frac{f_n(P)}{f_n(Q)}$ arány, a szabályos poliéderek esetén is állandó.

Irodalom

[1] Fitos László: Egy szabályos háromszögre vonatkozó tétel általánosítása, A matematika tanítása, 1994. évi 5. szám, 14-16. old.

[2] Liviu Niculescu, Vladimir Boskoff: Probleme practice de geometrie Editura Tehnică, Bucuresti, 1990., 137-138. old.

[3] MICĂ ENCICLOPEDIE MATEMATICĂ, Editura Tehnică, Bucuresti, 1980., 240. oldal. (Készült az 1971-ben kiadott „KLEINE ENZYKLOPÄDIE DER MATEMATIK" és az 1975-ben kiadott „MATEMATICS AT A GLACE" fordításai alapján.)