Menyire ismered az aszimptótákat?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Az aszimptóta a matematikában egy olyan görbét, többnyire egyenest jelent, amelyet egy függvény grafikonja határértékben megközelít, de nem éri el. A középiskolában csak az egyenes aszimptótákkal foglalkozunk.

Az aszimptóták típusa szerint lehetnek: vízszintes, függőleges és ferde aszimptóták. A továbbiakban röviden megvizsgáljuk, hogy hol kell keresni egyes aszimptótát, mikor van aszimptóta és hogyan adjuk meg az aszimptóta egyenletét.

Vízszintes aszimptóta: a $\pm\infty$-ben keressük, ebből a célból kiszámítjuk a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a$ határértéket. Amennyiben az a értéke véges, akkor a függvénynek van vízszintes aszimptótája, és ennek az egyenlete $y=a$.

Függőleges aszimptóta: olyan x_0 pontban keressük, ahol a függvény nincs értelmezve. Ebben az esetben kiszámítjuk az $l_b(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ és $l_j(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ határértékeket. Amennyiben ezek értéke $\pm\infty$, úgy a függvénynek van függőleges aszimptótája, és ennek az egyenlete $x=x_0$.

Ferde aszimptóta: szintén a $\pm\infty$-ben keressük, és az egyenlete $y=mx+n$, ahol $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ és $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$. Amennyiben ezek az értékek végesek, akkor létezik ferde aszimptóta. Ellenkező esetben nincs ferde aszimptóta.

Megjegyzések:

1) Ha van vízszintes aszimptóta, akkor nem keresünk ferde aszimptótát, mert visszakapnánk a vízszintes aszimptótát.
2) Racionális függvényeknek akkor van ferde aszimptótája, ha a számláló fokszáma eggyel több mint a nevezőé.

A jelen dolgozatban csak a racionális függvények aszimptótáira térünk ki, ugyanis ezek a leg tanulságosabbak, és sok más határérték a l'Hospital szabállyal, erre visszavezethető.

A racionális függvények határérték számolása a következő, úgynevezett fokszám-szabályra alapszik. Ezt, a következőkben fogalmazzuk meg:

Ha $P(x)=a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1x+a_0\in\mathbb{R}[X]$ és $Q(x)=b_qx^q+b_{q-1}x^{q-1}+\ldots+b_1x+b_0\in\mathbb{R}[X]$,

akkor $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\frac{a_p}{b_q}\left(\pm\infty\right)^{p-q},\ \text{ha} & p>q\\ \frac{a_p}{b_q},\ \text{ha} & p=q\\ 0,\ \text{ha} & p<q\end{cases}$$

A továbbiakban egy tesztet fogunk elvégezni azzal a célból, hogy az Olvasó megtudhassa, hogy mennyire ismeri a racionális törtek aszimptótáit.

Kérdések:

A teszt a következő 12 kérdésből áll: értelmezz olyan törtfüggvényt

1) amelynek csak 1 vízszintes aszimptótája van!
2) amelynek csak 1 függőleges aszimptótája van!
3) amelynek csak 1 ferde aszimptótája van!
4) amelynek csak 2 függőleges aszimptótája van!
5) amelynek csak 1 vízszintes és 1 függőleges aszimptótája van!
6) amelynek csak 1 vízszintes és 2 függőleges aszimptótája van!
7) amelynek csak 1 vízszintes és 3 függőleges aszimptótája van!
8) amelynek csak 1 függőleges és 1 ferde aszimptótája van!
9) amelynek csak 2 függőleges és 1 ferde aszimptótája van!
10) amelynek csak 3 függőleges és 1 ferde aszimptótája van!
11) amelynek semmilyen aszimptóta (a függvény ne legyen polinomfüggvény)!
12) amelynek csak 3 függőleges aszimptótája van!

Válaszok:

Lehetséges válaszok valamilyen sorrendben az alábbiak.

Válaszd ki, hogy melyik kérdéshez melyik válasz talál?

A) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ **B)** $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^3-x}$ **C)** $f(x)=\dfrac{x^5}{x^3-x}$ **D)** $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x-1}$

E) $f(x)=\dfrac{x^4+2}{x^3-x}$ **F)** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ **G)** $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ **H)** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

I) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ **J)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ **K)** $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$ **L)** $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$

Tippek:

1) A nevezőnek nincs valós gyöke, a számláló fokszáma nem lehet nagyobb mint a nevezőé.
2) A nevezőnek pontosan egyetlen gyöke legyen, a számláló fokszáma legalább kettővel nagyobb mint a nevezőé, hogy ne legyen függőleges aszimptóta sem.
3) A nevezőnek ne legyen gyöke, a számláló fokszáma eggyel nagyobb legyen mint a nevező fokszáma.
4) A nevezőnek pontosan két gyöke kell legyen, a számláló fokszáma legalább kettővel nagyobb legyen mint a nevező fokszáma.
5) A nevezőnek pontosan egy gyöke legyen, a számláló fokszáma ne legyen több mint a nevező fokszáma.
6) A nevezőnek pontosan két gyöke legyen, a számláló fokszáma ne legyen több mint a nevező fokszáma.
7) A nevezőnek pontosan három gyöke legyen, a számláló fokszáma ne legyen több mint a nevező fokszáma.

8) A nevezőnek pontosan egy gyöke legyen, a számláló fokszáma pontosan eggyel legyen több mint a nevező fokszáma.
9) A nevezőnek pontosan két gyöke legyen, a számláló fokszáma pontosan eggyel legyen több mint a nevező fokszáma.
10) A nevezőnek pontosan három gyöke legyen, a számláló fokszáma pontosan eggyel legyen több mint a nevező fokszáma.
11) A nevezőnek ne legyen valós gyöke, a számláló fokszáma legalább kettővel több legyen mint a nevező fokszáma.
12) A nevezőnek pontosan három gyöke kell legyen, a számláló fokszáma legalább kettővel nagyobb legyen mint a nevező fokszáma.

Ha alaposan átgondoltad a tippeket, akkor könnyen megértheted, hogy miért lehetséges válaszok a következők!

Megoldókulcs:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
H	**D**	**F**	**K**	**G**	**I**

7.	8.	9.	10.	11.	12.
B	**J**	**A**	**E**	**L**	**C**

Végezetül felhívjuk az érdeklődő Olvasó figyelmét arra, hogy ne csak tudomásul vegyék a megoldókulcs megoldásait, hanem számolásokkal ellenőrizzék is a leírtakat. Továbbá kihangsúlyozzuk, hogy a bemutatott megoldások nem az egyedüli lehetséges megoldások, csupán lehetséges megoldások. Éppen ezért javasoljuk, hogy az olvasó próbáljon találni minden kérdésre más-más példát!