Az A:1901 feladat általánosítása kapcsán

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A MatLap 7/2007-es számában, a VII. osztályosok számára kitűzött A:1901-es feladat a következő:

$$\text{Igazoljuk, hogy } \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}<5\,.$$

A kitűzött feladat megoldása sem éppen nyilvánvaló, továbbá még számos érdekes kérdés vetődik fel, mint például: elég éles felső korlát-e az 5? Vagy: lehetne-e egy elég éles alsó korlátot is felírni? Vagy : az előző két kérdés hogyan alakulna ha 100 helyett egy tetszőleges teljes négyzetet írnánk? Vagy: ugyanez a kérdés, ha a 100 helyett egy tetszőleges n pozitív természetes szám szerepel.

A továbbiakban az előző kérdésekre adjuk meg a választ, amiből kiderül, hogy a kitűzött feladat bizonyítása, továbbá ezzel kapcsolatban adódó más feladatok számos tanulságos fordulatot rejtegetnek. Természetesen a vizsgálódásainkat ugyancsak elemi szinten végezzük.

A kitűzött feladat kapcsán leghamarabb a következő összeg jut eszünkbe:

$$S_{100}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\ldots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Ez az összeg éppen azért juthat eszünkbe, mert ha a nevezőket beszorozzuk a kunjugáltaikkal, akkor az összeg kiszámítható, ugyanis:

$$S_{100}=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{99}-\sqrt{98}+\sqrt{100}-\sqrt{99}=\sqrt{100}-\sqrt{1}=9 \quad (1)$$

Másfelől azért is eszünkbe juthat, mert a bizonyítandó egyenlőtlenségben szereplő összeg az S_{100} összegnek éppen minden második tagja. A kérdés csupán az, hogyan hozható egymással kapcsolatba a kitűzött feladat, meg az S_{100} összeg? Elemi szinten leghamarabb jól megválasztott egyenlőtlenségekre gondolhatunk és valóban, ez célra is vezet.

Mindenek előtt vezessük be a következő jelöléseket:

$$A_{100}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \text{ és } B_{100}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}$$

Az előzőekben kiszámított S_{100} alapján igaz, hogy 9 = S_{100} = A_{100} + B_{100} (2)

Ez előző észrevételek alapján írjuk fel a következő egyenlőtlenségeket:

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}>\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$$

……………………………………………..

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}>\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Ha most összegezzük az egyenlőtlenség megfelelő oldalait akkor azonnal adódik, hogy 2· A_{100} > S_{100} ahonnan az (1) alapján A_{100} >4,5 (3) adódik. Hát sajnos ez még nem a kitűzött feladat, hanem csupán, az abban szereplő összegre egy alsó korlát. Az előző egyenlőtlenségek mintájára végezzük el ezúttal a következő összegezést:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}<2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}<2\cdot\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$$

…………………………………………….

$$\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}<2\cdot\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}$$

Ismét összegezve az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait ezt kapjuk: S_{100} - $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}$< 2· B_{100} és ugyancsak az (1) alapján 9-$(\sqrt{2}-1)$<2· B_{100} vagyis B_{100}> $\frac{10-\sqrt{2}}{2}\approx 4,2928...$ (4) . Ez sem a bizonyítandó egyenlőtlenség, ellenben ha megfigyeljük, hogy a (2) alapján 9 =S_{100}= A_{100}+ B_{100} és a (4)-es egyenlőtlenséggel egybevetve ez csak akkor teljesülhet, ha A_{100}< 9- $4,2928...\approx$4,7072… (5) és ebből már azonnal következik, hogy A_{100}<5 (5'), vagyis éppen a bizonyítandó A:1901-es feladat.

Így az (3) és (5) illetve (5') egyenlőtlenségek alapján 4,5 < A_{100}< 5 (*) és ezt az egyenlőtlenséget a természetes számok halmazán értékelve bizony elég éles egyenlőtlenség, ugyanis ebből az következik, hogy $[A_{100}]=4$, ahol $[a]$ az a valós szám egészrészét jelöli. Természetesen a valós számok halmazán a (*) egyenlőtlenséglánc mindkét oldala élesíthető, ellenben ezt már inkább a matematikai analízis, nem elemi eszközeivel végezhetjük el. Figyelembe véve a kapott eredményt, továbbá a (*) egyenlőtlenségláncot és a B_{100}> $\frac{10-\sqrt{2}}{2}\approx 4,2928...$ (4) egyenlőtlenséget, amit kerekítve még így is írhatunk, hogy B_{100}> 4 (4') még természetsen igényli a B_{100}-ra vonatkozóan is egy elég éles felső korlátot, írjuk fel a következő egyenlőtlenségeket:

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$
$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}<\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}<\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{98}}+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}$$

Ismét összegezve az egyenlőtlenség megfelelő oldalait a 2· B_{100}< S_{100}- $\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ = 9- (10-$\sqrt{99}$) vagyis B_{100}< $\frac{\sqrt{99}-1}{2}$ ≈4,4749…(6) vagy kerekítve B_{100}< 4,5 (6').

Így az (4) és (4') illetve (6) és (6') egyenlőtlenségek alapján 4 < B_{100}< 4,5 (**) és ezt az egyenlőtlenséget ugyancsak a természetes számok halmazán értékelve ezúttal is elég éles egyenlőtlenség, ugyanis ebből az következik, hogy $[B_{100}]=4$.

Tehát az eddigiekben bizonyítottak lényege így foglalható össze:

4 < B_{100}< 4,5 < A_{100}< 5 és ebből kifolyólag $[A_{100}]=[B_{100}]=4$ valamint $A_{100}+B_{100}=9$ (***)

Az általánosítást érdekében minden n≥2 természetes számra vezessük be a következő összeget:

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}...+\frac{1}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

Ez az összeg is a konjugáltakkal való beszorzással kiszámítható, és az (1) mintájára S_n= $\sqrt{n}$ - 1 (1")

Továbbá itt is fennáll egy $S_n=A_n+B_n$ típusú felbontás, ahol ezúttal

$$A_n=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...\text{ és }B_n=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+...$$

Az összegekben azért nem írtuk fel az utolsó tagokat, mert ez más-más alakú, aszerint, hogy n páros vagy páratlan, de a mi vizsgálódásaink céljából ez most nem mérvadó.

Jól megfigyelve az előzőekben az *n =100* esetben kapott eredményeket, a bemutatott egyenlőtlenségek összegezését ugyanúgy megismételve, a következő eredmények adódnak:

$A_n > \frac{\sqrt{n}-1}{2}$ (3”), $B_n > \frac{\sqrt{n}-\sqrt{2}}{2}$ (4”), $A_n < \frac{\sqrt{n}-2+\sqrt{2}}{2}$ (5”), $B_n < \frac{\sqrt{n-1}-1}{2}$ (6”)

Egyenlőtlenséglánc formájában, minden $n \geq 2$ esetén igaz, hogy

$$\frac{\sqrt{n}-\sqrt{2}}{2} < B_n < \frac{\sqrt{n-1}-1}{2} < \frac{\sqrt{n}-1}{2} < A_n < \frac{\sqrt{n}-2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{(e)}$$

Ha $n=(2m)^2$ és $m \in N^*$ akkor az (e) egyenlőtlenséglánc így alakul:

$$m-\frac{\sqrt{2}}{2} < B_{(2m)^2} < m-\frac{1}{2} < A_{(2m)^2} < m-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(e1)}$$

ahonnan $\left[A_{(2m)^2}\right] = \left[B_{(2m)^2}\right] = \left[\frac{\sqrt{n}-1}{2}\right] = m$-1, ha pedig $n=(2m+1)^2$ és $m \in N^*$ akkor az (e) egyenlőtlenséglánc így alakul:

$$m+\frac{1-\sqrt{2}}{2} < B_{(2m+1)^2} < m < A_{(2m+1)^2} < m+\frac{\sqrt{2}-1}{2} \quad \text{(e2)}$$

Ezért $\left[A_{(2m+1)^2}\right] = \left[\frac{\sqrt{n}-1}{2}\right] = m$ ellenben $\left[B_{(2m+1)^2}\right] = \left[\frac{\sqrt{n}-1}{2}\right]$-1 = m-1.

Továbbá könnyen belátható, hogy minden x,y valós- és z egész szám esetén igaz a következő két tulajdonság: a) ha $x<y$ akkor $[x] \leq [y]$ valamint b) $[x+z]= [x]+ z$

Ezek alapján, az (e) egyenlőtlenségláncból ez következik:

1) $\left[\frac{\sqrt{n}-\sqrt{2}}{2}\right] = \left[\frac{\sqrt{n}-1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right] \geq \left[\frac{\sqrt{n}-1}{2} - 1\right] = \left[\frac{\sqrt{n}-1}{2}\right]$-1 valamint

2) $\left[\frac{\sqrt{n}-2+\sqrt{2}}{2}\right] = \left[\frac{\sqrt{n}-1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right] \leq \left[\frac{\sqrt{n}-1}{2} + 1\right] = \left[\frac{\sqrt{n}-1}{2}\right]$+1

Bevezetve az $E_n = \left[\frac{\sqrt{n}-1}{2}\right]$ jelölést, az (e) és az 1) és 2) alapján az $[B_n]$ és $[A_n]$ értékeiről biztosan csak annyit állíthatunk, hogy $E_n-1 \leq [B_n] \leq [A_n] \leq E_n+1$. Azt, hogy mikor igaz, az $[B_n] \neq [A_n]$ és mikor is veszik fel az E_n-1 , E_n illetve E_n+1 értékeket nem könnyű megmondani, ezt az alábbi esetekkel is szemléltetjük.

Számolásokkal meggyőződhetünk arról, hogy az $[B_n]= E_n$ és ugyanekkor az $[A_n] = E_n+1$ igaz a következő számokra: közvetlen a 3^2 előtti 2 számra, közvetlen az 5^2 előtti 3 számra, közvetlen a 7^2 előtti 5 számra, közvetlen a 9^2 előtti 7 számra, közvetlen a 11^2 előtti 8 számra, közvetlen a 13^2 előtti 10 számra, stb. Látható, hogy a sejthető szabály bizonyítása minden bizonnyal terjedelmében is meghaladja a jelen cikk kereteit, ezért bármilyen további tulajdonság vagy eredmény megállapítását az érdeklődő Olvasóra bízzuk.