Az ellenpéldával történő cáfolás az elemi matematikában

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ismeretes, hogy a logika a helyes gondolkodás törvényeit leíró tudomány, ezért más tudományágakban sem nélkülözhető. Ezek közül kihangsúlyozzuk a retorikát és az érveléstant. A retorika az ókorban a szóbeli közlés folyamataként és szerkezeti formájaként, a hallgatóság meggyőzését jelentette. Ez a meggyőzési folyamat az érvelés magasztosságán, a nyelvi szépségén alapult. Ma már a retorikának is be kell tartania az alapvető logikai törvényeket. A helyes kijelentésekhez, érvényes kijelentésekre van szükség. Az érvelés egy olyan folyamat, amikor objektív bizonyítékok (alap, tények) felmutatásával bemutatunk valamit, vagy megpróbálunk valakit rávenni valamilyen gondolat elfogadására illetve megkíséreljük azt, hogy velünk azonos álláspontja legyen. Az érveléstannak is, mint következtetési szerkezeteknek, hasonló, szigorú törvényeket kell betartania, hiszen magába foglalja a bizonyítás elméletet.

A cáfolás a retorikában a beszéd ama része, mely az ellenfél részéről tett vagy tehető ellenvetések érvénytelenítésével foglalkozik. A cáfolás mintegy megfordított bizonyítás, mely azt törekszik kimutatni, hogy az ellenfél állításai magukban valótlanok vagy az ellenkezőjük a való, hogy meghazudtolják a tények, hogy az ellenfél okoskodása hibás elvekből indult ki, vagy helyes elvekből hibás következtetéseket vont le.

Például, amikor a beszélő azt mondja, hogy „Cáfolom, hogy az illető kiskorú. Itt a személyi igazolványa, mindenki megnézheti, hogy elmúlt 19 éves”, akkor ezáltal cáfolja az állítást, hogy kiskorú az illető. A cáfolás végrehajtásának a sikerfeltételei egyebek között a következők:

1) Felmerült egy állítás.
2) Ezzel a beszélő nem ért egyet, tagadja az állítást.
3) Az állítás ellen érveket hoz fel.
4) Az érvek az állítás ellen összehasonlíthatatlanul erősebbek, mint a mellette szóló érvek.

Ha teljesülnek ezek a feltételek, akkor a cáfolás sikeres, akkor a nyilatkozó nem csak mondta, hogy „Cáfolom…” , hanem tényleg meg is tette.

Gyakran halljuk azonban, hogy egy politikus azt mondja, hogy „Cáfolom a sajtóban megjelent állításokat”, és nem ad érveket az állítások ellen. Ebben az esetben a cáfolás sikertelen, mert nem teljesülnek a 3. é a 4. feltétel. Valójában, amikor a nyilatkozó azt mondja, hogy „ Cáfolom a sajtóban megjelent állításokat”, akkor ezáltal csak tagadja a sajtóban megjelent állításokat. Vagyis, ebben az esetben a megnyilatkozás cselekvési értéke csak tagadás, és nem cáfolás. Ne felejtsük tehát, hogy a cáfolás, mások által állított igazságok ***érvekkel való tagadása***.

Ezen kitérők után lássuk, hogy mi a helyzet a cáfolással a matematikai logikában és a matematikában.

A matematikában is az ismereteink igaz voltát be kell bizonyítanunk, mert azok lehetnek igazak vagy hamisak. Így vagy az ismeretek igazságát vagy azok hamisságát kell kimutatnunk. E célra két logikai művelet áll rendelkezésünkre. Az egyik a bizonyítás, a másik a cáfolás. Tulajdonképpen e két művelet egyet jelent: mindkettő bizonyítás, mert a cáfolás „negatív irányú bizonyítás” A bizonyítás és cáfolás az az ítélettel végezhető logikai művelet, amelynek segítségével egy tétel igazságát, vagy hamisságát tárjuk fel. Bizonyítani mindig annak kell, aki állít és a tétel igazságát mutatja. Cáfolnia mindig annak kell, aki tagad és a tétel hamisságát mutatja ki.

Nézzük hát, hogy a matematikai logikában, és maga a matematikában miből is áll a cáfolás, hogyan érvényesítjük a cáfolást a matematikai feladatok megoldása során.

Legyen $P(x)$ egy egyváltozós nyitott mondat (unáris predikátum, vagy egyváltozós logikai függvény). Gyakran kell belátnunk és bizonyítanunk olyan mondatokat, amelyekben a két kvantor valamelyike is szerepel:

1) $(\forall x \in H)(P(x))$, vagy

2) $(\exists x \in H)(P(x))$, ahol H egy adott halmaz.

Például: 1) Igazoljuk, hogy $(\forall x \in R)\left((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\right)$, vagy

2) Igazoljuk, hogy $(\exists x \in R)\left(x^2 = 1\right)$.

Az első példa egy azonosságot szemléltet ami mindig igaz, a második pedig egy egyenlet megoldásának a létezését mondja ki.

Felmerülhetnek ellenben olyan mondatok is, amikor nem tudjuk egyből eldönteni, hogy azok mikor igazak, és mikor hamisak. Nézzünk két ilyen példát:

1. Példa: Igaz-e, hogy $(\forall n \in N)\left(2^n + n + 1 \neq 5M\right)$?

2. Példa: Igaz-e, hogy $(\exists x \in R)\left(x(x+1)(x+2)(x+3) + 2 = 0\right)$

Belátható, hogy az első példa esetén, hogy nem tudom egyenként ellenőrizni, hogy az összes $n \in N$ szám esetén $2^n + n + 1$ nem lesz az 5-nek a többszöröse, és valójában, ha másként is bizonyítani szeretném ezt, valójában mit is bizonyítsak, hogy azt jelentse, hogy a szóban forgó összeg nem többszöröse az 5-nek. Ekkor felmerülhet az a gondolat, hogy hátha nem lesz igaz az állatás valamilyen n értékre? Próbáljunk legalább egy ilyen értéket keresni. Ha elkezdjük kipróbálni az első néhány természetes számot, akkor mind olyan értékeket kapunk, amelyek tényleg nem többszöröse 5-nek. De hát meddig próbálgassunk? Ennek alapján elgondolkozhatunk azon, hogy valahogyan módszeresen próbáljunk olyan n-et keresni, amelyre $2^n + n + 1 = 5M$ lenne. Próbáljunk előbb olyan n-et keresni, ami páros, ezért legyen $n= 2k$. Ennek alapján rendre felírható, hogy:

$2^n + n + 1 = 2^{2k} + 2k + 1 = 4^k + 2k + 1 = (5-1)^k + 2k + 1 = M5 + (-1)^k + 2k + 1$.

Most már könnyen belátható, hogy ha például $k=5$, akkor a kifejezés 5-nek a többszöröse lesz (de ez igaz minden $k=5(2m+1)$ alakú számra is) vagyis $2^{10} + 10 + 1 = 5M$.

Ezzel a feladat megoldása véget ért, ugyanis megdöntöttük azt a mondatot, hogy $(\forall n \in N)\left(2^n + n + 1 \neq 5M\right)$. Úgy mondjuk, cáfolással bizonyítottuk a feladatot, hiszen egy ellenpéldát adtunk, az n=10 értékre, amikor is a mondat ellentettje az igaz.

Nézzük csak tehát, hogy miből is áll egy $(\forall x \in H)(P(x))$ esetben a cáfolás? Ez abból áll, hogy azt igazolom, hogy $(\exists x_0 \in H)(\neg P(x_0))$ **(i)** vagyis keresek ***legalább egy*** olyan x_0 értéket, amelyre a feltételek teljesülnek, és az állítás ellentettje (tagadottja) lesz igaz.

A $\neg P(x_0)$ a $(\forall x \in H)(P(x))$ mondatnak egy úgynevezett **ellenpéldája!**

Nézzük most a második példát. Itt is már indulásból nehézségekbe ütközünk, hiszen nem könnyű eldönteni, hogy ténylegesen, a szóban forgó negyed fokú egyenletnek van-e vagy nincs valós x megoldása. Ellenben, ha arra gondolok, hogy esetleg nem-e tudnám bizonyítani, hogy az egyenletnek nincsen megoldása, akkor vajon mikor is nem lenne? Például akkor, ha minden valós x esetén $x(x+1)(x+2)(x+3) + 2 > 0$ vagy $x(x+1)(x+2)(x+3) + 2 < 0$. Próbálkozzunk ilyen irányban. Először is ha ügyesen végezzük el a zárójelek szorzását felírhatjuk, hogy: $x(x+1)(x+2)(x+3) = [x(x+3)] \cdot [(x+1)(x+2)] = \left(x^2 + 3x\right) \cdot \left(x^2 + 3x + 2\right)$.

Most, ha bevezetjük az $y = x^2 + 3x$ változócserét, akkor azonnal adódik, hogy

$x(x+1)(x+2)(x+3)+2=y(y+2)+1+1=(y+1)^2+1=(x^2+3x+1)^2+1>0$ ami azt igazolja, hogy Létezik olyan valós x érték, amelyre $x(x+1)(x+2)(x+3)+2=0$ lenne. Ezzel a feladatot megoldottuk, hiszen cáfoltuk azt, hogy létezik olyan valós x érték, amelyre $x(x+1)(x+2)(x+3)+2=0$ lehetséges lenne.

Nézzük ezúttal is, hogy miből is áll egy $(\exists x\in H)(P(x))$ esetben a cáfolás? Ez abból áll, hogy azt igazolom, hogy $(\forall x\in H)(\neg P(x))$ **(ii)** vagyis bebizonyítom, hogy ***minden esetben*** a bizonyítandó állítás ellentettje (tagadottja) áll fenn.

Ezzel tehát megoldottuk mind a két feladatot, és az (i) és (ii) által azt is beláttuk, hogy matematikai nyelvezettel mit is jelent a két fajta mondat cáfolása.

A továbbiakban, csupán az elemi matematika területére szorítkozva (tehát kizárva a felsőbb algebrát és a matematikai analízist) számos olyan feladatot és azok cáfolással történő megoldását mutatjuk be, amelyek tanulságul szolgálhatnak a cáfolási módszer jobb megértése és elmélyítése érdekében. A bemutatott feladatok esetén semmilyen rendszerességre, semmilyen teljességre nem törekszünk, csupán ízelítő ötleteket nyújtunk a kíváncsi Olvasónak. Hasonló feladatokat, a matematika minden területéről bárki érdeklődő saját maga is találhat és szerkeszthet. Most nézzünk néhány alkalmazást!

I. Az (i) alapján ellenpéldával cáfoljuk a következő mondatokat:

1) Ha $a,b\in N$ és $a+b$ páros szám, akkor a és b is páros számok.

2) Ha $a,b\in Z$ és $a+b=3M$, akkor $a=3M$ vagy $b=3M$.

3) Ha $m,n\in N$ és *3* nem osztja az *m*-et, *3* nem osztja az *n*-et, akkor *3* nem osztja az (*m*+*n*)-et.

4) Ha $x,y\in(0,1)$ akkor $x+y\in(0,1)$.

5) Ha $x,y\in R\setminus Q$, akkor $x+y\in R\setminus Q$.

6) Ha $x,y\in R\setminus Q$, és $x\neq y$ akkor $x\cdot y\in R\setminus Q$.

7) Ha $x,y\in R$, és $x<y$, akkor $x^2\leq y^2$.

8) Ha $x,y\in R$, $x<y$ és $xy>0$, akkor $x^2\leq y^2$.

9) Ha $x\geq 0$, akkor $x^2\geq x$.

10) Ha $x,y\in R^*$ és $x<y$, akkor $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$.

11) Bármely $y\in Z$ esetén létezik $x\in Z$ úgy, hogy $2x+y=3$.

12) Bármely $b\in R$ esetén létezik $a\in R$ úgy, hogy $a^2-4a+5=b$.

13) Ha $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, akkor $a,b>0$.

14) Ha $n\in N$, akkor $n^2+n+41=\textit{prímszám}$.

15) Ha $A,B,C\subset R$ és $A\cap B\cap C=\varnothing$, akkor $A\cap B=\varnothing$.

16) Ha $A,B,C\subset R$ és $(A\cap C)\subset(B\cap C)$, akkor $A\subset B$.

17) Ha $A\subset R$ korlátos halmaz, akkor az *A*-nak van egy legkisebb eleme.

18) Ha $A\cap B$ korlátos, akkor az $A,B\subset R$ szintén korlátos.

19) Ha $f:R\to R$ és $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ és az $f(x)=0$ egyenletnek van megoldása a (0,1) intervallumon, akkor $f(0)\cdot f(1)<0$.

20) Ha A,B véges halmazok és $cardB\leq cardA$, akkor minden $f:A\to B$ leképezés szürjektív.

21) Ha $f:A\to B$, $g:B\to C$ és $g\circ f$ szürjektív, akkor *f* szürjektív.

22) Ha $cardB \le cardA$, akkor minden $f: A \to B$ leképezés injektív.

23) Ha $f: A \to B,\ g: B \to C$ és $g \circ f$ injektív, akkor g injektív.

24) Ha $f: A \to B$ nem injektív, akkor f nem szürjektív.

25) Ha $f: A \to B$ nem szürjektív, akkor f nem injektív.

26) Ha $f: A \to B$ injektív, akkor f szigorúan monoton.

27) Ha $f, g: R \to R$ és $f + g$ szigorúan növekvő, akkor f és g szigorúan növekvők.

28) Minden olyan négyszög, amelynek van két derékszöge, körbeírható.

29) Ha két négyszög szögei egyenlők, akkor a két négyszög hasonló.

30) Ha két háromszög hasonló, és van két egyenlő oldaluk, akkor a két háromszög kongruens.

31) Minden olyan négyszög amelyben van két-két egyenlő szög, az paralelogramma.

32) Ha $A \ne \emptyset$ és $a, b \in A$, akkor $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \ vagy\ b = 0$.

II. Az (ii) alapján cáfoljuk a következő mondatokat:

1) Létezik $n \in N$ amelyre $n^2 + n + 1 \vdots 2010$.

2) Létezik $n \in N$ amelyre $\dfrac{3n+5}{2n+3}$ egyszerűsíthető.

3) Létezik olyan $a, b \in Z$ amelyre $13 \mid 2a + b$ és $13 \mid 5a - 4b$ de 13 nem ossza az $a - 6b$ kifejezést.

4) Nem léteznek a 3, 5, 7-en kívül más hármas ikerprímek.

5) Létezik $n \in N$ amelyre $2^{n+1} \cdot 5^n + 1$ prímszám legyen.

6) Létezik $n \in N$ amelyre $n+5,\ n+7,\ n+17$ egy időben prímszámok.

7) Létezik $n \in N$ amelyre $n^4 + 64$ prímszám.

8) Létezik $n \in N$ amelyre $\dfrac{n^2 + 8n + 15}{n+1} \in Z$.

9) Létezik $n \in N$ amelyre $\dfrac{3n+5}{2n+3} \in Z$

10) Létezik $n \in N$ amelyre $\sqrt{n^2 + n + 1} \in N$.

11) Létezik $n \in N$ amelyre $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n} \in N$.

12) Létezik $n \in N$ amelyre $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n} \in N$.

13) Létezik olyan $x \in R$ amelyre $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = 0$.

14) Létezik olyan $x \in R$ amelyre $\sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x} \le 1$

Megoldások

I. 1) Ellenpélda az a=1 és b=3, amelyre teljesül, hogy a+b páros. Általában a= 2p+1 és b= 2q+1 megfelel ellenpéldának.

2) Ellenpélda az a= 1 és b= 2, amelyre teljesül, hogy a+b= 3M. Általában az a= 3p+1 és b= 3q+2 jó ellenpélda.

3) Az előző feladat ellenpéldája megfelel.

4) Ellenpélda az $x = y = \dfrac{2}{3}$ amikor $x + y = \dfrac{4}{3} \notin (0,1)$.

5) Ellenpélda $x = \sqrt{2}$ és $y = -\sqrt{2}$, erre $x + y = 0 \in Q$.

6) Ellenpélda $x = \sqrt{2} - 1,\ y = \sqrt{2} + 1$ és erre $x \cdot y = 1 \in Q$.

7) Gondoljunk a negatív számokra is. Például $x=-2<1=y$ és $4=x^2>y^2=1$.

8) Ellenpélda $x=-3,\ y=-2$ amelyre $9=x^2>y^2=4$.

9) Gondoljunk az egynél kisebb számokra. Ellenpélda $x=\frac{1}{2}$ amelyre $\frac{1}{4}=x^2<x=\frac{1}{2}$.

10) A pozitív és negatív számokra is kell gondolnunk, így ellenpélda ha *x= -1, y= 1*, akkor $-1=\frac{1}{x}>\frac{1}{y}=1$ hamis.

11) Az $x=\frac{3-y}{2}\in Z$ nem mindig igaz, például y=2.

12) Ellenpélda, ha *b= 0*, akkor az $a^2-4a+5=(a-2)^2+1=0$ hamis.

13) Ellenpélda az *a= -2* és *b= -4.*

14) Ellenpélda az *n= 41.*

15) Ellenpélda az $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{4,5\}$.

16) Ellenpélda $A=\{1,4\}$, $B=\{1,2,3\}$, $C=\{1,2,5\}$

17) Ellenpélda $A=\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in N^*\right\}$, mert ha $\min A=\frac{1}{m}$ lenne, akkor például $\frac{1}{m+1}\in A$ és $\frac{1}{m+1}<a$.

18) Ellenpélda $A=R,\ B=\{0,1\}$.

19) Ellenpélda $f(x)=(2x-1)(3x-1)=6x^2-5x+1$ amelyre $f(0)\cdot f(1)>0$ pedig mindkét gyök a (0,1) intervallumban van.

20) Ellenpélda $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{0,1,2\}$ és $f:A\to B, f(x)=x^2$, amikor $f(x)\neq 2$.

21) Ellenpélda $f,\ g:Z\to Z, f(x)=2x-1,\ g(x)=\frac{x+1}{2}$ esetén $g\circ f=1_Z$ de *f* nem szürjektív, hiszen $f(x)\neq 2$.

22) Ellenpélda $A=\{0,1,2\}$, $B=\{1,3,5,7\}$ és $f(x)=|2x-1|$, vagy $A=\{-1,1\}$, $B=\{1,2,3\}$ és $f(x)=x^2$.

23) Ellenpélda $f,\ g:Z\to Z, f(x)=2x,\ g(x)=\left[\frac{x}{2}\right]$.

24) Ellenpélda $f:Z\to Z,\ \mathrm{f}(x)=\left[\frac{x}{3}\right]$ nem injektív de szürjektív.

25) Ellenpélda $f:Z\to Z, f(x)=3x-2$ nem szürjektív de injektív.

26) Ellenpélda $f:R\to R, f(x)=\begin{cases} x,\ x\in(-\infty,0]\cup[1,\infty) \\ 1-x,\ x\in(0,1)\end{cases}$, $f(0)<f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)$.

27) Ellenpélda $f(x)=2x+1,\ g(x)=1-x$.

28) Van olyan négyszög, amelynek van két derékszöge, de nem írható körbe! Ilyen a derékszögű trapéz.

29) Van két olyan négyszög, amelynek szögei egyenlők, de nem hasonlóak! Ilyenek a négyzet és a valódi téglalap.

30) Van két hasonló háromszög, amelynek van két egyenlő oldaluk, de nem kongruensek! Ilyenek például két egyenlőszárú derékszögű háromszög, ahol az egyik árfogója egyenlő a másik befogójával.

31) Van olyan négyszög, amelyben van két-két egyenlő szög, de nem paralelogramma! Egy ilyen példa a szimmetrikus trapéz.

32) Ha $A = R$ lenne, akkor nem lenne mit cáfolni, mert a feladat igaz. Ellenben nem említenek semmit az A halmaz természetéről. Ezért nézzük csak a következő ellenpéldákat.

a) Ha $A = M(R_2)$ és $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_2$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq O_2$ de mégis $ab = O_2$.

b) Ha $A = Z_6$, akkor $a = \hat{2} \neq \hat{0}$, $b = \hat{3} \neq \hat{0}$, de mégis $ab = \hat{0}$.

c) Ha $A = \{h : R \to R\}$ és $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$ egyik sem azonosan nulla, de mégis $f \cdot g = 0$. Az ellenpéldákban szereplő *a, b* elemeket zérusosztóknak nevezik.

II. 1) Bármely esetben $n^2 + n + 1$ nem osztható még 2-vel sem. Valóban az $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ szám nem osztható 2-vel, így 2010-zel sem, ami osztható 2-vel.

2) Az adott tört nem egyszerűsíthető. Valóban, ha $d \mid 3n+5$ és $d \mid 2n+3$, akkor $d \mid 6n+10$ és $d \mid 6n+9$, ezért $d \mid (6n+10)-(6n+9)=1$, vagyis csak 1-el lenne egyszerűsíthető.

3) Az *a-6b* mindenesetben osztható *13*-mal. Valóban $a - 6b = (5a - 4b) - 2(2a + b) = M13$.

4) Ha $p > 3$ prímszám, akkor $p = 3k \pm 1$ alakú, így $3 \mid (p+2)(p+4)$, ezért a $p, p+2, p+4$ számok egyike osztható 3-mal.

5) $2^{n+1} \cdot 5^n + 1 = 2 \cdot 10^n + 1$, vagyis a számjegyek összege 3, ezért a szám osztható 3-mal.

6) Ha $n = 3k$, akkor $n+15$ osztható 3-mal, ha $n = 3k-1$ akkor $n+7$ osztható 3-mal, ha pedig $n = 3k+1$, akkor $n+5$ osztható 3-mal.

7) $n^4 + 64 = n^4 + 16n^2 + 64 - 16n^2 = (n^2+8)^2 - (4n)^2 = = (n^2+4n+8)(n^2-4n+8)$

8) $\dfrac{n^2+8n+15}{n+4} = \dfrac{(n+4)^2-1}{n+4} = n+4-\dfrac{1}{n+4}$, ami csak akkor lenne egész szám, ha $\dfrac{1}{n+4} \in \mathbb{Z}$ lenne, de ez nem lehet, hiszen $n \in \mathbb{N}$.

9) Számolással ellenőrizhető, hogy $1 < \dfrac{3n+5}{2n+3} < 2$ és az $(1,2)$ intervallumban nincs egyetlen egész szám sem.

10) Minden esetben $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$ így $n^2 + n + 1$ nem lehet teljes négyzet.

11) Az összegnek n tagja van, így $\dfrac{1}{2} = n \cdot \dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n} < \; < n \cdot \dfrac{1}{n+1} < 1$ vagyis a tört értéke az $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ intervallumban van, így nem lehet egész.

12) Legyen p a legnagyobb prímszám az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ szorzatban, ez nyilvánvalóan csak az első hatványon szerepel benne, így a gyök alatti kifejezés nem osztható p^2-tel, ezért nem lehet teljes négyzet.

13) Ha $x \geq 1$, akkor $x^9\left(x^3 - 1\right) + x\left(x^3 - 1\right) + 1 \geq 1$, ha pedig $x < 1$, akkor $x^{12} + x^4(1 - x^5) + (1 - x) > 0$. Tehát mindenképpen $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$.

14) Mivel $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, ezért $\sin x, \cos x \in (0,1)$, ezért $\sin^2 x < \sin x < \sqrt{\sin x}$ és $\cos^2 x < \cos x < \sqrt[4]{\cos x}$, és összeadva a két egyenlőtlenség két szélén levő megfelelő kifejezéseket azt kapjuk, hogy $1 = \sin^2 x + \cos^2 x < \ < \sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}$, ami abszurdum.

Szakirodalom

[1] Oliver Konnerth: Greseli tipice in invatarea analizei matematice, Editura Dacia, Cluj-Napoca 1982

[2] Tuzson Zoltán: Miért nem lehet? 500 matematika feladat megoldással, Ábel Kiadó, 2011