Egy érdekes tulajdonságú számok halmaza
(Az A:1848-as feladat általánosítása)

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A MatLap 4/2007-es számában az A:1848-as feladat a következő:
„Igazoljuk, hogy az $A=1111122222$ szám felírható két egymásutáni természetes szám szorzataként"

Ötlethiányban leghamarabb az $1111122222=x\cdot(x+1)$ egyenlet megoldására gondolhatunk, ami az $x^2+x-1111122222=0$ másodfokú egyenlet megoldásához vezet, amelynek diszkriminánsa $\Delta= 444488889= 66667^2$ így a megoldóképlet alapján kapjuk, hogy $x= -33334$ illetve $x= 33333$. A pozitív egész számok közül csak az utóbbi felel meg és ennek alapján $1111122222= 33333\cdot 33334$ a megoldás.

Ellenben a feladatot V. osztályosok számára tűzték ki, így a másodfokú egyenlettel történő megoldás nem az igazi.

Valóban, ha jobban szemügyre vesszük az adott számot, akkor felírható, hogy
$A=1111122222=10^9+10^8+10^7+10^6+10^5+2\cdot(10^4+10^3+10^2+10+1)=11111\cdot(10^5+2)=11111\cdot100002$
$=1111\cdot2.3\cdot16667=(3\cdot11111)\cdot(2\cdot16667)=33333\cdot33334$

Természetesen merülnek föl a következő kérdések:

1) Vajon igaz marad-e a feladat állítása, ha az öt 1-es illetve 2-es helyett többet írunk?
2) Vajon léteznek még ilyen számok, ahol nem 1-eseket és 2-eseket írunk?

A továbbiakban mindkét kérdést egyidőben megválaszoljuk.

Mindezek előtt azonban figyeljük meg, hogy pl. $12=3\cdot4$, $1122=33\cdot34$…és az előbbiekben igazoltuk, hogy $1111122222=33333\cdot33334$, vagyis a két egymás utáni szám *nem akármilyen* alakú, hanem a kisebbik szám *csupa egyforma számjegyekből áll*, és ennek számjegyeinek a száma éppen az ismétlődő számjegyek számával egyenlő!

Mindezek után keressük meg azokat az a, b tízes számrendszerbeli számjegyeket amelyekre az $A_n = \overline{\underbrace{aa...a}_{n}\underbrace{bb...b}_{n}}$ minden $n\in N^*$ esetén felírható $x_n\cdot(x_n+1)$ alakban úgy, hogy létezzenek olyan $k \in N^*$ számjegyek amelyekre $x_n = \overline{\underbrace{kk...k}_{n}} \cdot \overline{\underbrace{kk...k(k+1)}_{n}}$.

Pontosabban, abból indulunk ki, hogy mint k=1 mint k=2 esetén A_1 és A_2 a kért alakú kell legyen. Azonnali számolásokból megkapjuk, hogy $\overline{ab} = k\cdot(k+1)$ valamint $\overline{aabb} = \overline{kk}\cdot\overline{k(k+1)}$ adta két egyenlet az $10\cdot a+b = k\cdot(k+1)$ és $10^2\cdot(10+1)\cdot a+(10+1)\cdot b = 11k\cdot(11k+1)$ egyenletrendszer megoldásához vezet, vagyis $10\cdot a+b = k^2+k$ és $100a+b = k\cdot(11k+1)$ ahonnan a b kiküszöbölésével $9a = k^2$ adódik, ami azt jelenti, hogy az a számjegy teljes négyzet kell legyen, így $a\in\{1,4,8\}$. Ezekben az esetekben a következőket kapjuk:

1) Ha $a=1$ akkor $k=3$ és $b=2$, így $12=3\cdot4$ valamint $1122=33\cdot34$
2) Ha $a=4$ akkor $k=6$ és $b=2$, így $42=6\cdot7$ valamint $4422=66\cdot67$
3) Ha $a=9$ akkor $k=9$ és $b=0$, így $90=9\cdot10$ valamint $9900=99\cdot100$

A továbbiakban belátjuk, hogy hasonló felírás 2-nél több, tetszőleges $n\in N^*$ számjegyszám esetén is igaz. Mindhárom eset általánosítása hasonló, ezért így bizonyíthatunk:

$A_n= \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n}=\underbrace{11...1}_{n}\cdot(10^n+2)=\underbrace{111...1}_{n}\cdot\underbrace{100...02}_{n}=(3\cdot\underbrace{111...1}_{n})\cdot(2\cdot\underbrace{166...67}_{n})=\underbrace{33...3}_{n}\cdot\underbrace{33...34}_{n}$,

$B_n=\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{22...2}_{n}=\underbrace{11...1}_{n}\cdot(4\cdot10^n+2)= \underbrace{111...1}_{n}\cdot\underbrace{400...02}_{n}=(6\cdot\underbrace{111...1}_{n})\cdot(\underbrace{66...67}_{n})=\underbrace{66...6}_{n}\cdot\underbrace{66...67}_{n}$,

$C_n=\underbrace{99...9}_{n}\underbrace{00...0}_{n}=\underbrace{11...1}_{n}\cdot(9\cdot10^n)= (9\cdot\underbrace{111...1}_{n})\cdot(\underbrace{10...00}_{n+1})=\underbrace{99...9}_{n}\cdot\underbrace{10...00}_{n+1}$.

Tehát az A_n, B_n, C_n számok halmaza minden $n\in N^*$ esetén az A:1848-as feladatban kért tulajdonságú A szám általánosítását képezik.