Szórakoztató matematika

Egy matematikai bűvésztrükk feltárása

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A továbbiakban egy egyszerű de érdekes matematikai bűvésztrükköt mutatok be, majd feltárjuk a megfejtését és kiterjesztését is.

A bűvésztrükk

Szükségünk van egy kis papírceltire, egy írószerre, aztán még egy füzetlapra, egy üres pohárra, valamint egy gurítókockára. Amíg még senki sem látja, írjuk fel a papírcetlire az 1089 számot. Tűrjük össze a papírcetlit és tegyük bele az üres pohárba. Ezután vegyük a kezünkbe a gurítókockát, és gurítsunk. Legyen például az első szám 6. Ezt jegyezzük fel az üres füzetlapra. Ezután gurítsunk még egyet. Legyen például a második szám 4. Ezt írjuk a füzetlapra a 6-os után. Ezután gurítsunk harmadszor is, legyen például 1. Ezt írjuk fel a 4-es után a papírlapra (A gurítások során, ha egyforma számokat gurítanánk, akkor azt nem jegyezzük le a papírlapra, hanem megismételjük a gurítást).

Tehát előttünk áll a 641-es szám. Most írjuk le ennek a fordítottját, a 146-ot. Ezután vonjuk ki a nagyobbik számból kissebbiket, így né: 641- 146= 495. Ezután írjuk fel ennek a számnak a fordítottját, az 594-et, és adjuk össze az előbbi számmal, így né: 495+594= 1089. Ezután a nézőközönség várakozására vegyük ki a pohárból a kis cetlit, bontsuk ki, és csodák csodájára rajta éppen az 1089-es szám található, a nézőközönség nagy megrökönyödésére ☺ . Hogy lehet ez, hiszen előre nem lehetett tudni, hogy milyen számokat dobunk a gurítókockával, ezek teljesen véletlenszerűen jönnek?

A bűvésztrükk feltárása

Ha még egyszer megismételjük a bűvésztrükköt, akkor is 1089 jön ki, de ez az ismétlődés már gyanussá teszi a trükköt, hiszen arra gondolunk, hogy az eredmény mindig ugyanannyi, 1089. Ezt kellene bebizonyítanunk. Nézzük csak!

Tekintsük tehát az $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ háromjegyű számot, ahol a, b, c mind különbözőek, és $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ezután képeztük a szám fordítottját: $\overline{cba} = 100c + 10b + a$. Feltételezhetjük, hogy például $\overline{abc} > \overline{cba}$. Ekkor a két szám közötti különbség: $\overline{abc} - \overline{cba} = 99 \cdot (c - a)$. Nézzük csak, hogy milyen értékeket is vehet fel ez a különbség, ha $a, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és $a \neq c$. Könnyen belátható, hogy $\overline{abc} - \overline{cba} = 99 \cdot (c - a) \in \{198, 297, 396, 495, 594\}$. Ezeknek a számoknak a fordítottjai rendre: $\{891, 792, 693, 594, 495\}$ és látható, hogy 198+891= 1089, 297+972= 1089, 396+693= 1089, 495+594= 1089, 594+495= 1089. Így hát a sejtésünk beigazolódott, miszerint a műveletek elvégzése után végeredménynek mindig 1089-et kapunk.

A bűvésztrükk kiterjesztése

Ha alaposan elgondolkodunk a bűvésztrükk feltételein, hamarosan kérdéseket fogalmazhatunk meg magunknak, mint például: Vajon fontos, hogy a gurítókocka $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ számait használjuk? Vajon muszáj kikötnünk, hogy a háromjegyű szám számjegyei mind különbözőek legyenek? Vajon használhatnák-e hasonló sikerrel más számokat is, például a 7, 8, 9-et hiszen ezek is csak számjegyek? Vajon használhatnánk-e a 0 számjegyet is? A továbbiakban ezekre a kérdésekre adunk választ!

A továbbiakban bizonyítani fogjuk, hogy bármilyen $a,b,c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ és $a \neq c$ számjegyek esetén áll a trükk, csupán azt az egyezményt kell kötnünk, hogy ha a kivonás eredménye kétjegyű szám lesz, például 99, akkor ezt 0-val kezdődő háromjegyű számnak tekinthetjük, 099-nek, és így végzünk vele műveletet, és ez nem mond ellent semmilyen szemléletnek.

Valóban az marad ellenőrizni a $\overline{abc} - \overline{cba} = 99 \cdot (c-a)$ értékébe, amikor $c - a \in \{7,8,9\}$. Ezekben az esetekben $\overline{abc} - \overline{cba} = 99 \cdot (c-a) \in \{693, 792, 891\}$. Látható hogy ekkor 693+396= 1089, 792+297= 1089, 891+198=1089.

Tehát a bűvésztrükköt úgy módosítottuk, hogy gondolunk egy háromjegyű számot (lehet nem valódi is, vagyis 0-val kezdődő), a számjegyei ismétlődhetnek is (de nem lehet mind a három egyforma), és nem lehet az első és az utolsó számjegy egyforma. Ekkor képezzük a szám fordítottját, és a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbiket, és írjuk le ezt a számot. Majd ezután képezzük ennek a számnak a fordítottját, és adjuk össze a már leírt számmal, és így 1089-et kapunk. Nézzünk egy olyan példát amikor ismétlődő számjegyek vannak, és a 0 is jelen van. Legyen például a gondolt szám 99= 099. Ennek a fordítottja 990, továbbá 990-099=891, ennek a fordítottja 198, és végül 891+198= 1089 ☺.

Remélem, hogy jól szórakoztak a kis bűvésztrükkön!