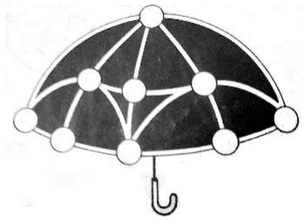
Bűvös alakzatok kitöltéséről (I.)

Tuzson Réka, Felsőboldogfalva, Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ha szeretjük a kihívásokat, a logikai feladványokat vagy a fejtörőket, akkor bizonyára már találkozhattunk olyan feladvánnyal, mint például a következő:



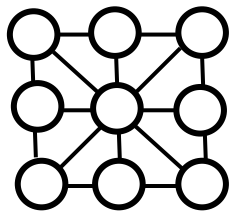
„ Helyezzük el az 1-től 9-ig terjedő természetes számokat az ábrán látható esőernyő kis karikáiban úgy, hogy mind a 7 körív mentén, a számok összege 18 legyen!"

Az ilyen típusú feladványok esetén általában adott egy alakzat (hívjuk úgy, hogy „bűvös alakzat"), amelynek karikáiban adott természetes számokat kell elhelyeznünk úgy, hogy adott vonalak, körívek, alakzatok, stb. mentén a számok összege állandó legyen, ez van amikor adott, van amikor nem. Az esetek többségében az ilyen feladványok leg kézenfekvőbb megoldása próbálkozással történik, ellenben ez nem mindig könnyű, nem mindig célravezető, van amikor hosszadalmas, vagy éppen bonyolult.

Éppen ebből kifolyólag arra gondoltam, hogy a megoldások keresése sokkal célravezetőbb, tanulságosabb és könnyebb, áttekinthetőbb lenne, ha valamilyen racionális matematikai gondolatmenetet követnénk, és az empirikus próbálkozásokat a minimumra szorítanánk, inkább ésszerű, algoritmikus vagy kizáró jellegű próbálkozásokkal helyettesítenék, ha nagyon muszáj, vagy éppen mellőznénk is a találgatásokat.

Ebben a részben egy egészen egyszerű módszerrel próbálkozunk, éspedig adott számnak összegekre való felbontásával, és az ismétlődések, vagy az esetek leegyszerűsítése céljából ezt rendezett módon végezzük. Nézzünk egy példát:

„Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok segítségével bontsuk fel a 15-öt három szám összegére!" Tehát 15= a+ b+ c alakú felírásokat keresünk, ahol a, b, c az adott számkörben van. A módszerünkben a rendezés abból áll, hogy feltételezzük, hogy a> b> c. És kezdjük az a lehetséges legnagyobb értékével, az a= 9-cel. Ezért 15= 9+ 5+ 1, vagy 15= 9+ 4+ 2. Most csökkentjük az a értékét 8-ra. Ezért 15= 8+ 6+ 1, 15= 8+ 5+ 2, vagy 15= 8+ 4+ 3. Ha most a=7, akkor 15= 7+ 6+ 2, vagy 15= 7+ 5+ 3. Végül, ha a= 6, akkor 15= 6+ 5+ 4. És tovább nem kell folytatnunk, mert ha tovább csökkentenénk az a értékét, akkor már b>a kellene, ami absurdum. Tehát a kommutativítástól eltérően az előbbi 8 felbontás megadja a 15= a+ b+ c összes ilyen különböző felbontását. Ezen felbontási módszer képezi a további feladványok megoldásának az alapgondolatát.



1. feladvány: Írjuk be a mellékelt ábra 9 karikájába az 1-től 9-ig terjedő természetes számokat úgy, hogy mind a 8 vonal mentén a számok összege 15 legyen!

Megfejtés: Ez a feladvány a 3×3-as bűvös négyzet vagy mágikus négyzet nevet viseli. E matematikai játék eredete az ókorig kísérhető vissza. Valószínű, még sokkal régibb. Indiából az arabok közvetítésével kerülhetett Európába, de a Kínában talált *I-csing* nevű könyvben, amely mágikus eljárásokat és jóslatokat tartalmaz, szintén találunk egyet. Ez az írásos hagyomány pedig i.e. 1100 táján keletkezett (!) . Az itt található mágikus négyzet a mellékelt ábrán látható.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

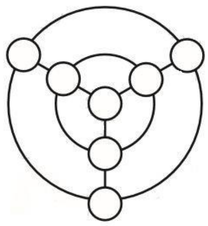
Európában a XIV. században a bizánci *Moschopulos,* a XVI. században *Michael Stifel* és *Adam Riese* (1492-1559) német matematikusok foglalkoztak bűvös négyzetek szerkesztésével. A XVII. században *Bachet de Méziriac* (1587-1638) francia matematikus talált új módszereket bűvös négyzet készítésére. A leghíresebb bűvös négyzet, amelyet sokan a matematika szimbólumának is tartanak, a magyar származású festő, Albrecht Dürer Melankólia című képén található. Az utolsó sor közepén a 15 és 14 egybeolvasva a mű keletkezésének évszámát (1514) jelenti. A 34-es szám, 18 féle összeadás eredménye lehet. Például a négy sarokmező számainak összege és a négy középső szám összege is 34, de még több, ilyen értékű, négytagú összeget is találhatunk. A középkorban a mágikus négyzeteknek csodálatos gyógyító erőt tulajdonítottak. Ma már ez a babona, szórakoztató játékká szelídült.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	**15**	**14**	1

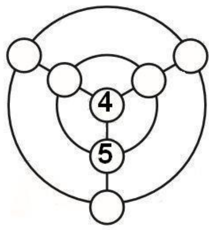
E rövid kitérő után térjünk vissza a feladvány megoldására, amelynél tulajdonképpen a mellékelt 3×3-as négyzet kisnégyzeteibe kell beírnunk az 1-től 9-ig terjedő számokat úgy, hogy a vízszintes sorok mentén, a függőleges oszlopok mentén, és a két átló mentén a számok összege minden esetben ugyanannyi legyen, éspedig 15. Írjuk fel mindenek előtt a 15-nek a 15= a+ b+ c alakú összes felbontását: 15= 9+ **5**+ 1, 15= 9+ 4+ 2, 15= 8+ 6+ 1, 15= 8+ **5**+ 2, 15= 8+ 4+ 3, 15= 7+ 6+ 2, 15= 7+ **5**+ 3, 15= 6+ **5**+ 4. Vegyük észre, hogy az 5-ös éppen 4-szer fordul elő, ezért a kilenc mező közül olyanba kell írnunk, amelyik négy összegben szerepel, mondjuk úgy, hogy a fokszáma 4. Egyetlen ilyen mező van, éppen a középső mező. Továbbá vegyük észre, hogy az összeg alakú felírásban, az 1, 3, 7, 9 számok nem kerülhetnek a sarokkba, mert azoknak a fokszáma 3 (hiszen három összeghez tartoznak), ezért csak a közepekre (a szürke négyzetekbe) kerülhetnek. Továbbá a 2, 4, 6, 8 számok az összegben 3-3-szor fordulnak elő, ezért így ők egyértelmű beírással a fehér kis négyzetekbe kerülnek. Az 1, 3, 7, 9 számokat a szürke négyzetben cirkulárisan permutálhatjuk, éspedig 3!= 6 féle képpen. Ezeknek egy rögzítésére a 2, 4, 6, 8 számok beírása már egyértelmű (nem találnak több helyre), ezért 6 különböző 3×3-as bűvös négyzet van.

	5	

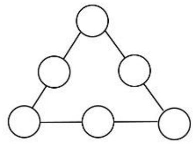
2. feladvány: Írd be a számokat a mellékelt ábrán látható céltáblába 1-től 7-ig úgy, hogy az összegük mindkét körvonalon, és az egyenesek mentén minden esetben 12 legyen.



Megfejtés: Írjuk fel az összes 12= a+ b+ c alakú felbontást:
12= 7+ **4**+ 1, 12= 7+ 3+ 2, 12= 6+ 5+ 1, 12= 6+ **4**+ 2, 12= 5+ **4**+ 3.
Vegyük észre, hogy ezekben a felbontásokban a 4 épen háromszor szerepel, ami azt jelenti, hogy az ábrán a középső karikába kell írni (ennek a foka 3, hiszen három összegben szerepel). Ezek után válasszunk a többi számból tetszőlegesen egyet, esetünkben például az 5-öt. Ezt a maradék 6 hely bármelyikébe beírhatjuk, írjuk be például az ábrán látható módon. Így az 5 alá egyértelműen a 3 kerül. A második felbontás alapján a 2-öt és a 7-et a 3-mal egy kőrre kell tegyük, ezt a maradék két helyre 2 féle képpen írhatjuk be. Ekkor a második körön az 1 és a 6 beírása egyértelmű, és látható, hogy végül is 6×12 különböző megoldásunk lesz.

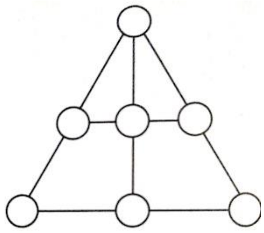


Megjegyzés: A feladat nagyon egyszerűen is megoldható, ha észrevesszük, hogy a két körön levő számok összege ami 24, éppen egy számmal különbözik az 1+2+3+4+5+6+7=28 összegtől, tehát az az egy szám, amit éppen középre kell írnunk, pontosan 28-24=4. Tovább a megoldás már tetszőlegesen folytatható úgy, ahogyan már leírtuk.



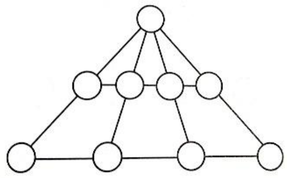
3.feladvány: Írjuk be az ábrán látható háromszög kis karikáiba a számokat 1-től 6-ig úgy, hogy a háromszög mindhárom oldala mentén a számok összege 9 legyen!

Megfejtés: Írjuk fel az összes 9= a+ b+ c alakú felbontást:
9= 6+ 2+ 1, 9= 5+ 3+ 1, 9= 4+ 3+ 2. Vegyük észre, hogy az 1, 2, 3 számok mindegyike éppen 2-szer fordul elő, ezért ezek a háromszögön a csúcsokba kell kerüljenek, továbbá ezeket 2 különböző féle képpen írhatjuk be, és az oldalközepekre a 4, 5, 6 számok beírása már egyértelmű, tehát összesen 2 különböző megoldás létezik.



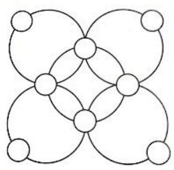
4. feladvány: Írjuk be az ábrán látható háromszög kis karikáiba a számokat 1-től 7-ig úgy, hogy mind a 4 szakasz mentén a számok összege 12 legyen!

Megfejtés: Írjuk fel az összes 12= a+ b+ c alakú felbontást:
12= 7+ **4**+ 1, 12= 7+ 3+ 2, 12= 6+ 5+ 1, 12= 6+ **4**+ 2, 12= 5+ **4**+ 3.
Vegyük észre, hogy a 4-es háromszor szerepel a felbontásokban, ezért a 4-et a háromszög felső csúcsába írjuk be. Mivel két olyan felbontás van amiben a 4 nem szerepel, ez éppen a két vízszintes sorba adja a számokat. Egyszer az alsó sorba kerül a 7, 3, 2 éspedig 3!= 6 féle képpen, aztán 6, 5, 1 kerül ide ugyancsak 6 féle képpen. Az utolsó három kör kitöltése már egyértelmű. Tehát összesen 12 különböző megoldás van.



5. feladvány: Írjuk be az ábrán látható háromszög kis karikáiba a számokat 1-től 9-ig úgy, hogy mind az 6 szakasz mentén a számok összege 18 legyen!

Megfejtés: Írjuk fel az összes 18= a+ b+ c alakú felbontást:
18= **9**+ 8+ 1, 18= **9**+ 7+ 2, 18= **9**+ 6+ 3, 18= **9**+ 5+ 4, 18= 8+ 7+ 3, 18= 8+ 6+ 4, 18= 7+ 6+ 5. Vegyük észre, hogy az egyetlen szám ami 4-szer fordul elő, az a 9, ez kerül a háromszög felső csúcsába. Most keressük meg a 18= d+ e+ f +g négytagú felbontásokat:
18= 8+ **7+ 2**+ 1, 18= 8+ **6+ 3**+ 1, 18= 8+ 5+ 3+ 2, 18= 8+ **5+ 4**+ 1, 18= 7+ **6+ 3**+ 2, 18= 7+ 6+ 4+ 1, 18= **7**+ 5+ 4**+ 2**. Ezek közül nem felelnek meg azok amelyekben szerepelnek a 7+2, 6+3, 5+4, mert ezek szerepelnek már ott ahol 9-es van, vagyis a ferde vonalmenti beírások. Maradt tehát a 18= 8+ 5+ 3+ 2 és 18= 7+ 6+ 4+ 1. Ezek közül valamelyik a felső, másik az alsó sokba kerülnek (tehát 2 megoldás). Továbbá 4 számot 4!=24 féle képpen cserélhetünk, ezért egy soron belül 24 megoldás van. A kitöltés sorrendje: beírjuk a felső csúcsba a 9-et, a felső sorba 8, 3, 3, 2 vagy 7, 6, 4, 1 valamilyen sorrendben, és akkor a második sorba a 7, 6, 4, 1 beírása már egyértelmű. Tehát 2×24=48 különböző megoldás van.

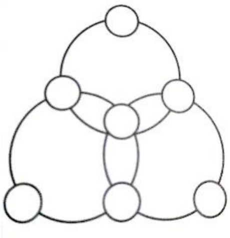


6. feladvány: Írjuk be az ábrán látható háromszög kis karikáiba a számokat 1-től 8-ig úgy, hogy mind az 5 kör mentén a számok összege 12 legyen. Majd úgy, hogy az összeg 18 illetve 16 legyen!

Megfejtés: Írjuk fel az összes 12= a+ b+ c alakú felbontást:
12= 8+ 3+ 1, 12= 7+ 4+ 1, 12= 7+ 3+ 2, 12= 6+ 5+ 1, 12= 6+ 4+ 2, 15= 5+ 4+ 3.
Továbbá írjuk fel a 12= d+ e+ f+ g négytagú felbontásokat is. Ezek a következők:
12= 6+ 3+ 2+ 1 és 12= 5+ 4+ 2+ 1. Ez utóbbi kettő közül kell valamelyiket ráírnunk a közbülső kőrre (ezt 3!=6 féle képpen cirkulárisan permutálhatjuk). Miután már ráírtuk, akkor a többi szám beírása már egyértelmű. Összesen tehát 2×6= 12 különböző megoldás van. Ha az összeg 18 kell legyen, akkor mivel 18= 7+ 7+ 3, 18= 8+ 6+ 4, 18= 7+ 6+ 5, ezért mivel csak három felbontás van, nem jut mind a 4 körre, ezért ez esetben nincs megoldás. Ha az összeg 16, ennek 8 darab 3 tagú felbontása van, így a megoldás hosszadalmas lenne, ezért jelölje rendre x, y, z, t a középső 4 számot. Adjuk most össze az ábra összes számait. Ebben, x, y, z, t kétszer

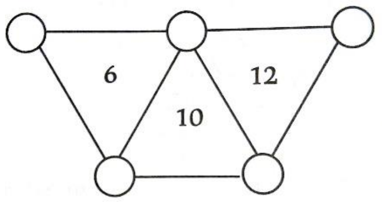
szerepel, és mivel 1+ 2+ 3+ 4+ 5+ 6+ 7+ 8= 36, ezért 36+x+ y+ z+ t= 4×16 adódik, ahonnan x+ y+ z +t= 28, de ez ellentmond annak, hogy x+ y+ z +t $\geq$ 5+ 6+ 7+ 8= 26.

7. feladvány: Helyezd el a körökben az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokat úgy, hogy mind a három körön az ott levő számok összege 13 legyen.



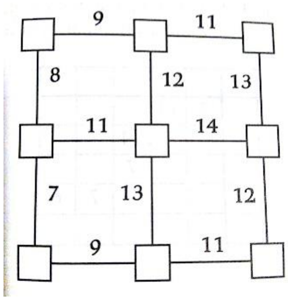
Megfejtés: Írjuk fel az összes 13= a+ b+ c+ d alakú felbontást:
13= 7+ 3+ 2+ **1**, 13= 6+ 4+ 2+ **1**, 13= 5+ 4+ 3+ **1**. Mivel az 1-s háromszor fordul elő, ezért a középső kis karikába 1-et írunk (ott találkozik 3 kör). A köröknek a kettőnkénti metszetei másodfokúak, ezért a 2, 3, 4-et írjuk a köröknek a páronkénti metszéseibe, továbbá a negyedik számok beírása már egyértelmű, tehát 2 különböző megoldás van (az elforgatásoktól eltekintve).

8. feladvány: Írd be az 1,2, 3,4,5 számokat a körökbe úgy, hogy mind a három háromszögnél a csúcsokba írt számok összege megegyezzen a háromszögben levő számmal.



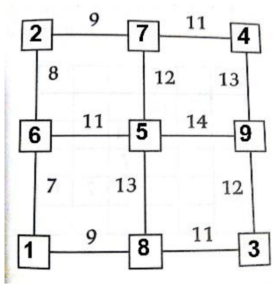
Megfejtés: Mivel 6= **3**+ 2+ 1, 10= 5+ **3**+ 2, 12= 5+ 4+ **3**, és mivel a 3 háromszor fordul elő, ezért az kerül a felső középső körbe. Ezután a felső sorban baloldalon 2, és jobboldalon 5 lesz, aztán a többi már egyértelmű. A feladatnak egyetlen megoldása van.

9. feladvány: Töltsd ki az üres négyzeteket az 1, 2, 3, …, 9 számokkal úgy, hogy a szakasz végpontjainál levő számok összege a



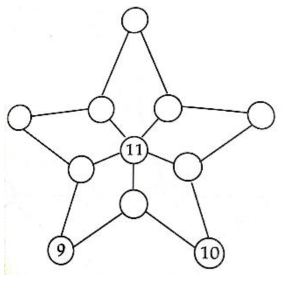
Megfejtés: Először is arra fókuszálunk, hogy a középső kisnégyzet 4 összeghez tartozik. Ezért bontsuk lel a 11, 12, 13, 14 számokat kéttagú összegekre. Ezek a következők:

11= 9+ 2,	12= 9+ 3,	13= 9+ 4,	14= 9+ 5,
11= 8+ 3,	12= 8+ 4,	13= 8+ 5,	14= 8+ 6,
11= 7+ 4,	12=7+ 5,	13= 7+ 6	
11= 6+ 5			

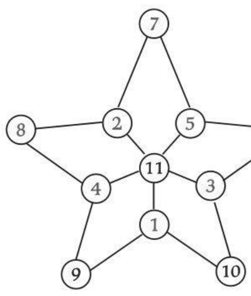


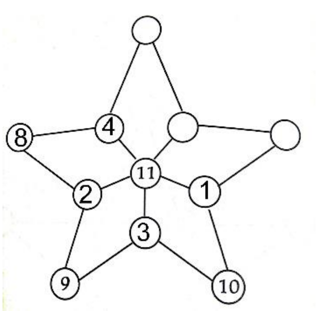
Olyan számot keresünk, ami mind a 4 oszlopban közös. A 8 ugyan közös, de a 6 társa már nem, ezért csak a 9 és 5 közös, ezzel máris csak a 14= 9+ 5 marad, ami azt jelenti, hogy a középső négyzetbe vagy 9 vagy 5 talál. Előbb ha beírjuk a 9et, akkor jobb középen 5 lesz, de bal alsó sarokban szintén 5 fog kijönni. Tehát középen muszáj az 5 legyen, és lépésről lépésre a kitöltés egyértelmű. Egyetlen megoldás van, ami az ábrán látható.

10. feladvány: A körökbe írd be az 1-től 8-ig terjedő természetes számokat úgy, hogy mind az öt tartományban 25 legyen az ott levő négy szám összege.



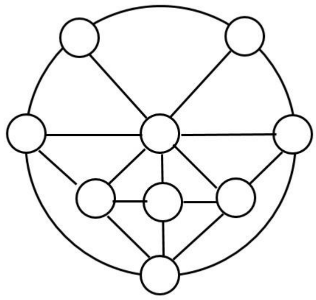
Megfejtés: Mivel 25- 11= 14, ezért írjuk fel a 14= a+ b+ c alakú felbontásait: 14= 8+ 5+ 1, 14=8+ 4+ 2, 14= 7+ 6+ 1, 14= 7+ 5+ 2, 14= 7+ 4+ 3, 14= 6+ 5+ 3. Figyeljük azt a négyszöget amelyen van a 11 és a 10. Ezért a másik két csúcs összege 25- (11+ 10)= 4 és 4= 1+ 3 vagy 4= 3+ 1. Vegyük sorra a két esetet. Ha az alsó középső körbe 1 kerül, akkor a mellékelt ábra kitöltései egyértelműek, és jó megoldást kapunk. A másik esetben egy darabig egyértelmű a kitöltés, de marad 3 kör, ahova valamilyen sorrendben az 5, 6, 7 talál, de a 11+4





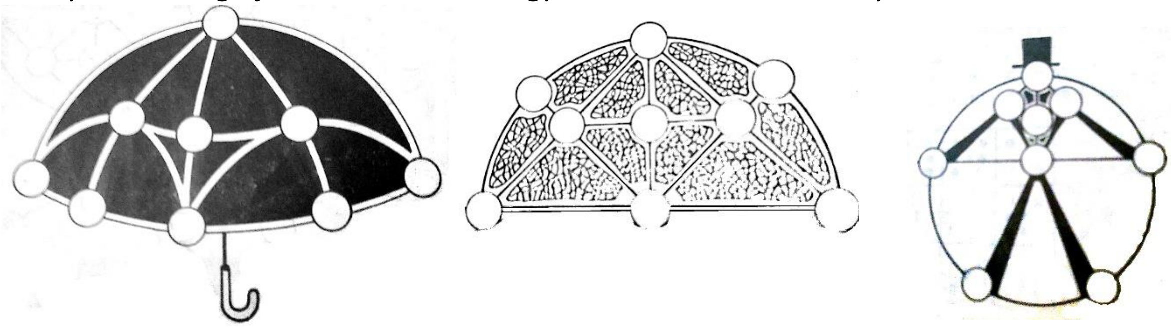
mellé nem található két olyan szám amivel együtt 25 legyen, tehát a második eset nem származtat jó megoldást.

11. feladvány: A mellékelt ábrán látható kiskörökbe írjuk be az 1-től 9-ig levő természetes számokat úgy, hogy a 6 szakasz mentén levő 3-3 szám összege, valamint a körön levő 5 szám összege 18 legyen.



Megfejtés: írjuk fel a 18= a+ b+ c alakú felbontásokat:
18= **9**+ 8+ 1, 18= **9**+ 7+ 6, 18= **9**+ 6+ 3, 18= **9**+ 5+ 4, 18= 8+ 7+ 3, 18= 8+ 6+ 4, 18= 7+ 6+ 5. Ezután írjuk fel a 18= d+ e+ f+ g+ h alakú felbontásokat: 18= 8+ 4+ 3+ 2+ 1, 18= 7+ 5+ 3+ 2+ 1, 18= 6+ 5+ 4+ 2+ 1. Mivel a 9-es 4-szer fordul elő, ezért ezt kell írnunk az ábra középső körébe. A körre legalul, a 6, 7, 8 valamelyike kell kerüljön, mert ezek éppen 3-szor fordulnak elő a felbontásokban. Az öttagú felbontások alapján az 1 és a 2 mindenképpen a kör kerületére fog kerülni (mindegyikben közös). ha legalul 8 lenne, akkor függőlegesen 9+ x+ 8= 18 lenne, vagyis x=1, de nem lehet, mert a kör kerületén van. Továbbá ha legalul 7 lenne, akkor függőlegesen 9+ y+ 7= 18 lenne, vagyis y= 2, de ez sem lehet, mert a kör kerületén van. Marad tehát, hogy legalul 6 legyen, így fölötte 3. A 18= 8+ 7+ 3 felbontás alapján, a 3 két oldalán 8 illetve 7 van, és innen tovább a kitöltés egyértelmű.

Befejezésül megemlítjük, hogy megtörténhet az is, hogy bizonyos bűvös konfigurációk egymással egyenértékűek, vagyis ugyanazt az ábrát jelentik, csak úgymond izomorf változatban. Az alábbiakban bemutatunk a 11. feladvány ábrájával izomorf ábrákat, amelyeken a megfejtés természetesen ugyanaz mint a 11. feladvány esetén.



Végezetül megjegyezzük, hogy az érdeklődő Olvasó saját maga is elképzelhet különféle bűvös alakzatokat, különböző feltételekkel saját maga szerkeszthet ilyen feladványokat, de természetesen az is előfordulhat, hogy az illető feladványnak nem lesz megoldása.

A következő részben általánosabb módszerrel tárgyalunk hasonló feladványokat.

Szakirodalom:

[1] Simon József: matematika feladatgyűjtemény az V. osztály számára, Alutus, Csíkszereda, 2016 (18. oldal)
[2] Nicolae Oprisiu: Olimpiada jocurilor rationale, Editura Dacia, Clusj-Napoca, 1984
[3] Róka Sándor: 137 számrejtvény, Typotex, Budapest, 2008.