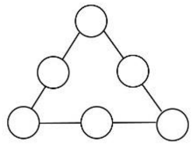
Bűvös alakzatok kitöltéséről (II.)

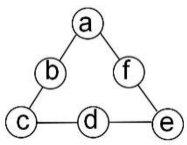
Tuzson Réka, Felsőboldogfalva, Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Az előző részben olyan módszert mutattunk be, amikor az illető számokat összegekre bontottuk, és követtük a számok előfordulásának a gyakoriságát. Azonban ennek a módszernek is megvannak a hátrányai ugyanis, ha egy számot nagyon sok féle képpen lehet összegre bontani, akkor a helyes megoldások kiválasztása már körülményes lehet, éppen a sok lehetőség miatt.

Ebben a részben más megvilágításban tárgyaljuk a feladványokat: egyenletrendszereket állítunk fel, amelyeket diszkrét, véges számhalmazokon kell megoldani. Azonban bizonyos esetekben a számok összegekre való bontásának a módszerét továbbra is alkalmazzuk, és megpróbálunk hatékony kiszűrési módszert keresni azokra az esetekre, amikor a lehetőségek száma túl nagy. Az egyenletrendszeres módszernek van egy nagy előnye is: ezzel a módszerrel meg tudjuk állapítani, hogy a bűvös alakzatokon levő összeg milyen korlátok között változhat, így indulásból nem kell megadni, hogy mennyi az összeg csupán annyit, hogy a számok összege állandó, és ennek az állandónak az értékét meg tudjuk határozni. Nézzünk hát néhány megoldott feladványt:



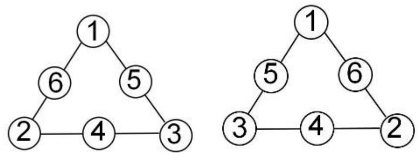
1.feladvány: Írjuk be az ábrán látható háromszög kis karikáiba a számokat 1-től 6-ig úgy, hogy a háromszög mindhárom oldala mentén a számok összege állandó legyen!



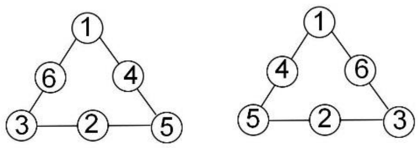
Megfejtés: Betűzzük el a kis köröket a mellékelt ábra szerint. Írjuk fel tehát a feladat feltételeit: $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a+ b+ c= c+ d+ e= e+ f+ a= S (állandó). Összeadva a három egyenletet azt kapjuk, hogy:

3S= a+ b+ c+ d+ e+ f= 1+ 2+ 3+ 4+ 5+ 6+ a+ c+ e vagyis a+ c+ e= 3S- 21. De a feltételek alapján 6= 1+ 2+ 3 $\leq$ a+ c+ e= 3S- 21 $\leq$ 4+ 5+ 6= 15 ahonnan 27 $\leq$ 3S $\leq$ 36 és mivel $S \in \mathbb{N}$, ezért felírható, hogy $S \in \{9, 10, 11, 12\}$. Vegyük sorra a négy esetet!

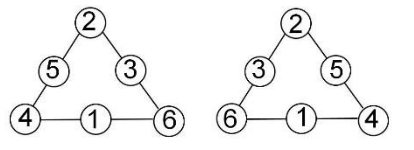
1) Ha S= 9, akkor írjuk fel a 9-nek a háromtagú összegre bontásait: 9= **6**+ 2+ 1, 9= **5**+ 3+ 1, 9= **4**+ 3+ 2. Vegyük észre, hogy a felbontásokban a 4, 5, 6 ami egyszer szerepelnek ezeket oldal közepekre kell írnunk, de 1, 2, 3 kétszer szerepelnek, ezeket csúcsokba kell írnunk, ezek után a kitöltés már egyértelmű. Mivel a 3 csúcs értékeinek a ciklikus permutációinak a száma 2, ezért 2 különböző megoldás létezik. Ezek a mellékelt ábrán láthatók.



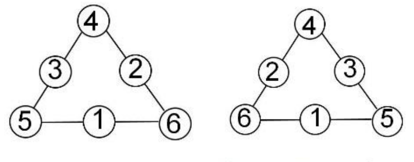
2) Ha S= 10, akkor mivel 10= 6+ 3+ 1, 10= 5+ 4+ 1, 10= 5+ 3+ 2 és a kétszer előforduló számok az 1, 3, 5, ezért ezek kerülnek a csúcsokba, éspedig 2 féle képpen. Ez a két megoldás a mellékelt ábrán látható.



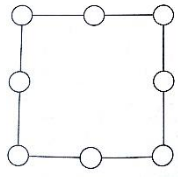
3) Ha S= 11, akkor mivel 11= 6+ 4+ 1, 11= 6+ 3+ 2, 11= 5+ 4+ 2 és a kétszer előforduló számok 2, 4, 6, ezért ezek kerülnek a csúcsokba, éspedig 2 féle képpen. Ez a két megoldás a mellékelt ábrán látható.



4) Ha S= 12, akkor mivel 12= 6+ 5+ 1, 12= 6+ 4+ 2, 12= 5+ 4+ 3 és a kétszer előforduló számok 4, 5, 6, ezért ezek kerülnek a csúcsokba, éspedig 2 féle képpen. Ez a két megoldás a mellékelt ábrán látható.

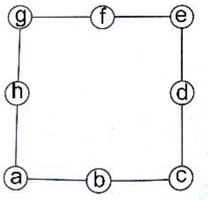


2. feladvány: helyezd el a körökben az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat úgy, hogy a négyzet mindegyik oldalán az érték ugyanaz az érték legyen a három szám összege.



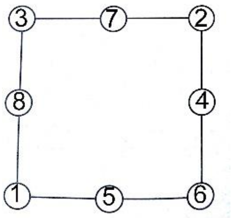
Megfejtés: Betűzzük el a kis köröket a mellékelt ábra szerint. Írjuk fel tehát a feladat feltételeit: $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, továbbá az állandó összeg alapján

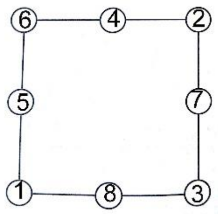
(1) a + b + c = S ; (2) c + d + e = S ; (3) e + f + g = n ; (4) g + h + a = S

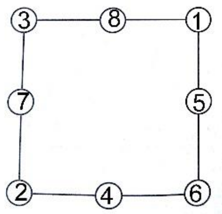


Az (1)- (4) egyenletek megfelelő oldalainak az összegzéséből kapjuk, hogy
2·(a + c + e + g) + (b + d + f + h) = 4·S . De S = a + b + c + d + e + f + g + h =
= 1 + 2 + …+ 7 + 8 = 36, ezért a + c + e + g = 4·S - 36 = 4· (S – 9). Ebből azonban felírható, hogy 10= 1+ 2+ 3+ 4 $\leq$ $\leq$ a + c + e + g = 4·S - 36 = 4· (S – 9) $\leq$ 5+ 6+ 7+ 8= 26. Tehát 2,5 ≤ S-9 ≤ 6,5 ugyanakkor S$\in$N, ezért 3 ≤ S-9≤ 6 ahonnan S $\in$ $\{12, 13, 14, 15\}$. Vegyük sorra ezt a négy esetet.

1) Ha S= 12, akkor a+ c+ e+ g= 4(12- 9)= 12. Írjuk fel a 12-nek a négytagú bontásait. Ezek a következők: 12= **6**+ **3**+ 2+ 1 vagy 12= **5**+ 4+ **2**+ 1. Az első esetben vegyük észre, hogy ha 6 és három két szomszédos csúcson lenne, akkor közéjük 12- 6 -3= 3 kerülne ami azt jelenti, hogy a 3-as kétszer szerepel. Tehát a 6 és a három nem lehetnek szomszédosak, ezért átlósan helyezkednek el. Állapodjunk meg abban, hogy ennek a feladatnak a megoldása során **a bontásokban vastagon fogjuk jelölni azokat a számokat amelyek átlósan kell elhelyezkedjenek.** Ha 6 és 3 átlósan helyezkednek el, akkor a másik két csúcsban 1 illetve 2 (vagy fordítva) van. Ezáltal a többi karikák kitöltése már egyértelmű. Egy megoldás a baloldali ábrán látható. Továbbá, ha összecseréljük a 6 és 3, illetve 1 és 2 átlók menti elemeke, akkor még 2 megoldása a középső és a jobboldali ábrán látható. Ha mindkét átló elemeit egyszerre cseréljük össze, akkor olyan esetet kapunk, ami forgatással a legelső esettel azonos. Tehát 3 különböző megoldás van,







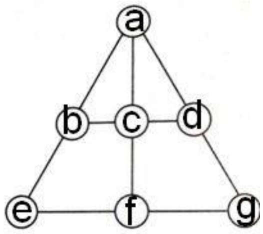
A második esetben 5 és 2 átlósan helyezkednek el (másképpen közéjük 5 kell, ez absurdum), így 5 és 1 szomszédosak, közéjük 6 kell, továbbá 4 és 2 szintén szomszédosak, közéjük is 6 kell, ez absurdum, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

2) Ha S= 13, akkor a+ c+ e+ g= 4(13- 9)= 16. Írjuk fel a 16-nak a négytagú bontásait. Ezek a következők: 16= **8**+ **4**+ 3+ 1, 16= 8+ 5+ **2**+ **1**, 16= 7+ **6**+ 2+ **1**, 16= **7**+ 5+ 3+ **1**, 16= **7**+ 4+ 3+ **2**, 16= **6**+ 5+ 3+ **2**, 16= **6**+ 5+ 4+ **1**. Minden esetben vastagon jelöltük azt a két számot, amelyek muszáj, hogy átlósan helyezkedjenek el. Vizsgáljuk az első felbontást. Mivel 8 és 4 átlósan helyezkednek el, 8 és 1 biztosan szomszédosak, és közöttük 13- 8 -1= 4 lesz ami azt jelentené, hogy a 4 kétszer szerepel.
Ehhez hasonló kizárásokkal könnyen megállapítható, hogy a nem aláhúzott összegek esetén nem kapunk jó megoldást. Az aláhúzott esetekben kapunk 3- 3 jó megoldást kapunk. Az érdeklődő Olvasónak javasoljuk, hogy ellenőrizze amiket kijelentettünk, de nem bizonyítottunk!

3) Ha S= 14, akkor a+ c+ e+ g= 4(14- 9)= 20. Írjuk fel a 20-nak a négytagú bontásait. ezek a következők: 20= **8**+ **7**+ 3+ 2, 20= 8+ 7+ **4**+ **1**, 20= **8**+ **6**+ 5+ 1, 20= **8**+ **6**+ 4+ 2, 20= **8**+ 5+ 4+ **3**, 20= **7**+ 6+ 4+ **3**, 20= 7+ 6+ **5**+ **2**. Ezúttal is megvastagítottuk azokat a számokat amelyek átlósan kell legyenek, és aláhúztuk azokat a felbontásokat, amelyek jó megoldásokat származtatnak. Ez utóbbiak száma szintén 3+3. Mindezek ellenőrzését ezúttal is az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

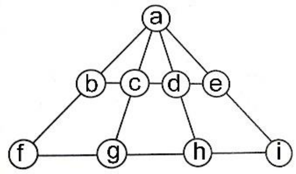
4) Ha S= 15, akkor a+ c+ e+ g= 4(15- 9)= 24. Írjuk fel a 14-nek a négytagú bontásait. Ezek a következők: 24= 8+ 7+ **6**+ **3**, 24= **8**+ **7**+ 5+ 4. Ezúttal is megvastagítottuk azokat a számokat amelyek átlósan kell legyenek, és aláhúztuk azokat a felbontásokat, amelyek jó megoldásokat származtatnak. Ez utóbbiak száma szintén 3+3. Mindezek ellenőrzését ezúttal is az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

A feladatnak az összes különböző megoldásainak a száma 3+ 6+ 6+ 3= 18.



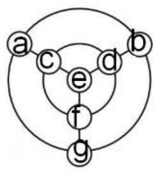
3. feladvány: Írjuk be az ábrán látható háromszög kis karikáiba a számokat 1-től 7-ig úgy, hogy mind a 4 szakasz mentén a számok összege ugyanannyi legyen!

Megfejtés: Írjuk be a kis karikákba az ABC betűit, a mellékelt ábra szerint. A feltételek alapján tehát: a b+ c+ d+ e+ f+ g= 1+2+2+4+5+6+7= 28 (1)
Továbbá a+ b+ e= S (2), a+ d+ g= S (3), b+ c+ d= S (4), e+ f+ g=S (5), a+ c+ e=S (6)
Összegezve (2)-(6) kapjuk, hogy 3a +2b +2c +2d +2e+ 2f+ 2g= 5S, és figyelembe véve az (1) összefüggést kapjuk, hogy a+ 2×28= 5S, tehát 1$\le$ a= 5S- 2×28 $\le$7, ahonnan kapjuk, hogy 57$\le$5S $\le$63, vagyis 11, 4 $\le$ S $\le$ 12, 2 ahonnan csak az S= 12 adódik, így a= 4. Továbbá az (5) alapján e+ f+ g=12 és ezúttal $e \neq 4$, $f \neq 4$, $g \neq 4$ így a 12 felbontása 12= 7+ 3+ 4, vagy 12= 6+ 5+ 1. Beírva tehát az a= 4 értéket és az e, f, g $\in \{2,3,7\}$ illetve értékeket, e, f, g $\in \{6,1,5\}$ a többi szám beírása egyértelmű. Mivel a 2, 3, 7 illetve 6, 4, 5 permutációinak a száma 6- 6, ezért a különböző megoldások száma 12 (lásd az előző részben is).



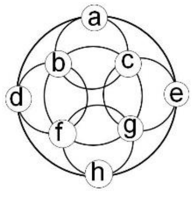
4. feladvány: Írjuk be az ábrán látható háromszög kis karikáiba a számokat 1-től 9-ig úgy, hogy mind az 6 szakasz mentén a számok összege ugyanannyi legyen!

Megfejtés: Betűzzük el a kis köröket a mellékelt ábra szerint. Írjuk fel tehát a feladat feltételeit: a+ b+ c+ d+ e+ f+ g+ h+ i= 45 (1), a+ b+ f=S (2), a+ c+ g= S (3), a+ e+ i= S (4) a+ d+ h= S (5), b+ c+ d+ e= S (6), f+ g+ h+ i= S (7). Összegezük az (1)- (5) összefüggéseket, így kapjuk: 4a b+ c+ d+ e+ f+ g+ h+ i= 5S vagyis 3a+ 45= 5S, ahonnan $a = \frac{4S}{3} - 15$ (*). Továbbá a (6)- (7) összefüggések alapján 45- a = 2S adódik, ahonnan a= 45 -2S (**). A (*) és (**) összefüggések alapján ellenben S= 18, így a= 9 adódik. Megkeressük a 18-nak azon felbontásait, amelyekben a 9 szerepel. Ezek a következők: 18= 9+ 8+ 1, 18= 9+ 7+ 2, 18= 9+ 6+ 3, 18= 9+ 5+ 4. Ezek kerülnek a ferde egyenesek mentén levő karikákba. A vízszintesekbe azok kerülnek, amelyekben nem szerepelnek egyidőben 8 és 1, 7 és 2, 6 és 3, 5 és 4. Ezek a következők: 18= 8+ 5+ 3+ 2, 18= 7+ 6+ 4+ 1. Ezekből négyet az alsó sorba 4!= 24 féle képpen írhatunk, majd a másik négyet is 24 féle képpen, ez összesen 48 különböző megoldás. A fölötte levő sorba a kitöltés már egyértelmű.



5. feladvány: Írd be a számokat a mellékelt ábrán látható céltáblába 1-től 7-ig úgy, hogy az összegük mindkét körvonalon, és az egyenesek mentén minden esetben ugyanannyi legyen.

Megfejtés: Betűzzük el a kis köröket a mellékelt ábra szerint. Írjuk fel tehát a feladat feltételeit: a+ b+ c+ d+ e+ f+ g= 28 (1), a+ c+ e= S (2), b+ d+ e= S (3), g+ f+ e= S (4), a+ b+ g= S (5), c+ d+ e= S (6). Összegezve a (2)- (4) összefüggéseket kapjuk, hogy: a+ b+ c+ d+ e+ f+ g +2e= 3S, vagyis 28+ 2e= 3S, ahonnan $e = \frac{3S}{2} - 14$ (*). Most összegezzük az (5)- (6) összefüggéseket és kapjuk, hogy a+ b+ c+ d+ e+ f+ g –e= 2S ahonnan 28- e= 2S, vagyis e= 28- 2S (**). Így a (*) és (**) összefüggések alapján S= 12 és e= 4 adódik. A körök mentén nem szerepel a 4-es, ezért a 12-nek olyan felbontását keressük, amelyekben nem szerepel a 4-es. Ezek: 12= 7+ 3+ 2 és 12= 6+ 5+ 1. Ezek közül valamelyiket helyezzük el a külső körön, ez 2 féle képpen lehetséges. A belső körön a számok beírása egyértelmű. A külső körön a másik három számot szintén 2 féle képpen helyezhetjük el, ezért összesen 4 különböző megoldásunk van.

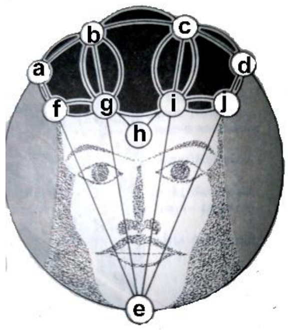


6. feladvány: Írd be a számokat a mellékelt ábra kis köreibe 1-től 8-ig úgy, hogy mind a 6 kör mentén a számok összege ugyanannyi legyen.

Megfejtés: Betűzzük el a kis köröket a mellékelt ábra szerint. Írjuk fel tehát a feladat feltételeit: a+ b+ c= S (1), b+ d+ s= S (2), c+ e+ g= S (3), f+ g+ h= S (4)
b+ c+ f+ g= S (5), a+ d+ h+ e= S (6), a+ b+ c+ d+ e+ f+ g= 36 (7). Az (5)- (6) alapján 2S= 36, ezért S= 18. Továbbá az (1) –(4) alapján a+ 2b+ 2c+ d+ 2f+ 2g+ h+ e= 72, így a (7) alapján

36+ b+ c+ f+ g= 72 vagyis az (5) alapján 36+ 18= 72 ellentmondásra jutunk. Tehát a feladványnak nincs megoldása.

A következőben látni fogjuk, hogy ha ez utóbbi feladványban elhagyjuk a külső kört, akkor már lesz megoldás.



7. feladvány: Írd be a számokat a mellékelt ábra kis köreibe 1-től 10-ig úgy, hogy mind az 3 kör mentén, mind a 2 körív mentén és mind a 4 egyenes mentén a számok összege 20 legyen.
Megfejtés: Betűzzük el a kis köröket a mellékelt ábra szerint. Írjuk fel tehát a feladat feltételeit: a+ b+ c+ d+ e= 20 (1), a+ b+ f+ g= 20 (2), a+ e+ f= 20 (3), b+ e+ g= 20 (4), b+ c+ g+ i= 20 (5), c+ e+ i= 20 (6), c+ d+ i+ j= 20 (7), d+ e+ j= 20 (8), f+ g+ h= 20 (9), h+ i+ j= 20 (10), a+ b+ c+ d+ e+ f+ g+ h+ i+ j= 55 és természetesen a betűk páronként különbözőek. . Az (1)-(9)-(10) összegzéséből a+ b+ c+ d+ e+ f+ g+ 2h+ i+ j=60, és a (11) alapján h= 5 adódik. Továbbá a (2)- (7) összegzéséből kapjuk, hogy a+ b+ c+ d+ f+ g+ i+ j=40 és a (11) alapján e+ h= 15 adódik, és mivel h= 5, ezért e= 10. Írjuk be tehát az ábra h és e kisköreibe az 5 illetve 10 értékeket, és folytassuk tovább a kitöltést. Az (1) és e= 10 alapján a+ b+ c+ d= 10 adódik, és mivel 10= 4+ 3+ 2+ 1 az egyetlen felbontása a 10-nek, ezért $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$. vegyük sorra:

1) Ha a= 1, akkor f= 9, g= 6, b=4 és vagy c=3 és d= 2, vagy c= 2 és d= 3.
2) Ha a= 2, akkor f= 8, g= 7, b= 3, és vagy c= 4 és d= 1, vagy c= 1 és d= 4.
3) Ha a= 3, akkor f= 7, g= 8, b= 2 és vagy c= 4 és d= 1, vagy c= 4 és d=4
4) Ha a= 4, akkor f= 6, g= 9, b= 1 és vagy c=3 és d= 2, vagy c=2 és d= 3.

Tehát a feladatnak 8 különböző megoldása van.

Szakirodalom:

[1] Tuzson Zoltán: Egy szórakoztató matematika feladat kapcsán (II.), ML 6/2005 (232.-233. old)
[2] Tuzson Zoltán: Egy érdekes logikai feladat kapcsán (A MatLap A:1872-es feladata kapcsán), ML 7/2007, (259.- 260. old)
[3] Tuzson Zoltán: Egy szórakoztató matematika feladat kapcsán III., ML 7/2005 (276.-277. old)
[4] Nicolae Oprisiu: Olimpiada jocurilor rationale, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1984
[5] Róka Sándor: 137 számrejtvény, Typotex, Budapest, 2008.