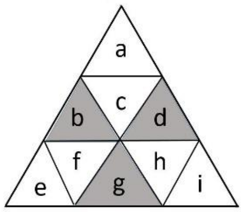
Bűvös alakzatok kitöltéséről (III.)

Tuzson Réka, Felsőboldogfalva, Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

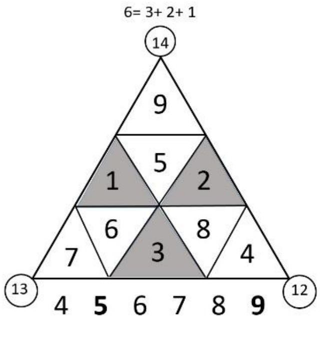
Ebben a részben csupán egyetlen feladványt oldunk meg. A feladvány megtalálható az [1]-ben, a megoldás ellenben hiányos és hibás is, ugyanis az [1]-ben csupán 3 megoldás szerepel (látni fogjuk, hogy ezekből 48 különböző megoldás származtatható), továbbá több olyan esetre amikor van megoldás, azt írták, hogy nincs megoldás. Valójában azért elemezzük ezt a feladatot, mert a megoldások száma szokatlanul nagy szám, közel kétszáz. Ilyen esetben felmerülhet az a kérdés, hogyan lehet módszeresen felfedni ilyen nagyszámú megoldást?

Ezt a feladatot is betűs módszerrel (algebrailag) kezdjük el megoldani, aztán szükség lesz bizonyos számok összeg alakú felbontásaira, és mivel ezek igen sok féle képpen történnek, ezért szükség lesz az esetek módszeres tárgyalására, és az eredményeknek egy módszeres szűrésére is.

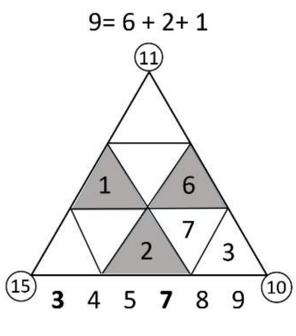


<u>Feladvány</u>: A mellékelt ábrán látható 3 egységnyi oldalú, szabályos háromszög alakú táblázat kis háromszögeibe úgy kell elhelyezni az 1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyeket, hogy bármely 2 egység oldalú (4 kis háromszögből álló) háromszögben az összeg ugyanannyi legyen.

Megfejtés: A mellékelt ábrán látható módon vezessük be az egyes kis háromszögek jelölését. Jelöljük S-el a szóban forgó 4 kis háromszögből álló háromszögekbe írt számok összegét. A feladat feltételeit így írhatjuk le:
a+ b+ c+ d= S (1), b+ e+ f+ g= S (2), d+ g+ h+ i= S (3) és a+ b+ c+ d+ e+ f+ g+ h+ i= =1+ 2+ 3+ 4+ 5+ 6+ 7+ 8+ 9= 45 (4) é a betűk páronként különbözőek. Adjuk össze az (1), (2), (3) összefüggéseket és azt kapjuk, hogy 45+ b+ d+ g= 3S vagyis b+ d+ g= 3(S- 15). De felírható, hogy:
6= 1+ 2+ 3 $\leq$ b+ d+ g = 3(S- 15) $\leq$7+ 8+ 9= 24 ahonnan kapjuk, hogy 6 $\leq$ b+ d+ g $\leq$ 24 és ebből kapjuk, hogy $\leq$17 $\leq$S $\leq$ 23, vagyis az S értékeire kimondható, hogy $S \in \{17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22\}$.



1) Ha S= 17, akkor b+ d+ g= 3(17- 15)= 6. A továbbiakban olyan ábrákat szerkesztünk, amelyeken minden szükséges adat rajta lesz, és minden ami szükséges, leolvashat az ábráról. A mellékelt ábra fölött látható a 6= 3+ 2+ 1 ami nem más, mint a 6-nak az egyetlen 6= a+ b+ c alakú felbontása. Ezeket a számokat a b, d, g kis háromszögekbe, az-az a szürke háromszögekbe kell írjuk. A ciklikus permutációk alapján ez 2 különböző féle képpen írható. A nagy háromszög alatt felsoroltuk a többi 6 számjegyet. A háromszög három csúcsánál 1- 1 karikába felsoroltuk a az illető két fehér kis háromszögekbe írandó számok összegét, esetünkben 14, 13 és 12. A 6 darab számból ami a nagy háromszög alatt van, legelőbb ki kell választanunk azt a kettőt, amelyiknek a beírása egyértelmű. Jelen esetben 14= 9+ 5 az egyértelmű, ezért megvastagítottuk az 5 és 9 számjegyeket. Ezeknek a beírása 2 különböző módon történik. Most már egyértelmű a 13 és 12 csúcsoknál levő számok beírása is, ahogyan a mellékelt ábra mutatja. A 7 és 6, valamint a 8 és 4 beírása is 2- 2 különböző esetet adnak. Tehát az ábrán látható kitöltésből összesen 2×2×2×2= 16 különböző megoldás származtatható.



2) Ha S= 18, akkor b+ d+ g= 3(18- 15)= 9. A 9-nek három különböző felbontása van: 9= 6+ 2+ 1, 9= 5+ 3+ 1 és 9= 4+ 3+ 2. Az ezek alapján való kitöltést szintén az előző ábra mintájára végezzük, és közben ismételjük át a lépéseket:

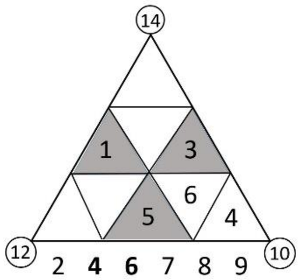
a) A háromszög fölé írjuk fel a jelenlegi felbontást: 9= 6+ 2+ 1
b) A háromszög alá írjuk a megmaradt számokat: 3, 4, 5, 7, 8, 9
c) A három csúcshoz a három karikába írjuk be, hogy mennyi kell legyen a két illető szám összege, esetünkben 11, 15, 10.
d) A szürke kis háromszögekbe írjuk be a felbontás három számát, jelen esetben a 6, 2, 1.

e) Ezután a háromszög alatti számokból válasszunk ki kettőt, amellyel valamelyik karikában levő szám **egyértelműen** előáll. Jelen esetben 10= 7+ 3, és ezt a két számjegyet megvastagítottuk.

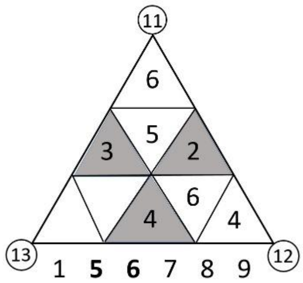
f) Ezután vegyük szemügyre, hogy a maradék 4 számból előállítható-e a másik két csúcsnál bekarikázott szám. Jelen esetben nem, tehát ezzel a felbontással nincs megoldás.

A másik két felbontással a következő ábrák készíthetők:

9= 5+ 3+ 1



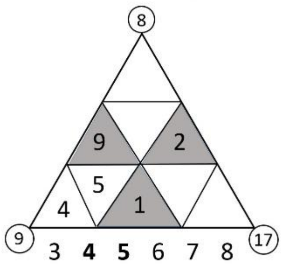
9= 4+ 3+ 2



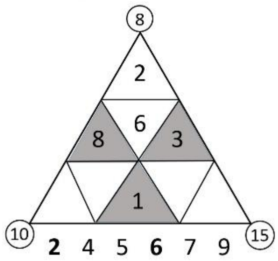
Az ábrák alapján belátható, hogy egyik esetben sem lesz megoldás. Tehát az S= 18 esetén nem kapunk megoldást.

3) Ha S= 19, akkor b+ d+ g= 3(19- 15)= 12. A 12-nek 6 különböző felbontása van: 12= 9+ 2+ 1, 12= 8+ 3+ 1, 12= 7+ 4+ 1, 12= 7+ 3+ 2, 12= 6+ 5+ 1, 12= 6+ 4+ 2. Az egyes esetekben az ábrák a következők:

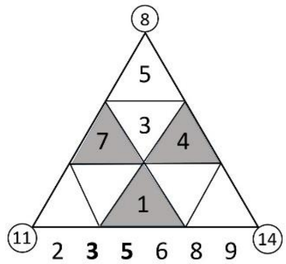
12= 9+ 2+ 1



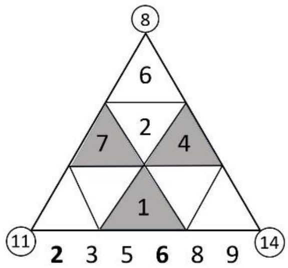
12= 8+ 3+ 1



a) 12= 7+ 4+ 1

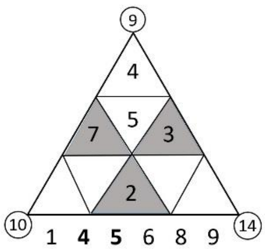


b) 12= 7+ 4+ 1

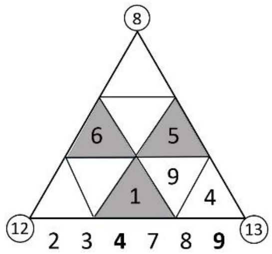


Az első két felbontásra beláthatóan nem kapunk megoldást. A harmadik felbontás esetén két megoldást fogunk kapni, az ábrákat a), és b) jelölésekkel láttuk el. Itt azért van két megoldás, mivel 8= 5+ 3= 6+ 2, 11= 9+ 2= 8+ 3, 14= 8+ 6= 9+ 5. Ezeket egyértelműen lehet beírni. Folytatjuk a felbontásokat:

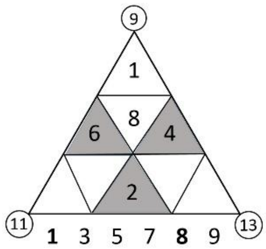
12= 7+ 3+ 2



12= 6+ 5+ 1



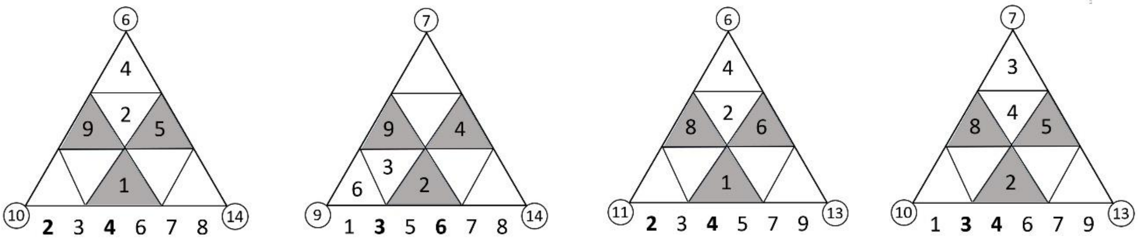
12= 6+ 4+ 2



A baloldali ábra esetén, mivel 10= 9+ 1, 14= 8+ 6, ezért beírhatók, tehát van megoldás. A következő két ábra esetén belátható, hogy valamelyik csúcsnál levő szám nem állítható elő, tehát nincs megoldás. Tehát az S= 19 esetben 2× 16+ 16= 48 különböző megoldás van.

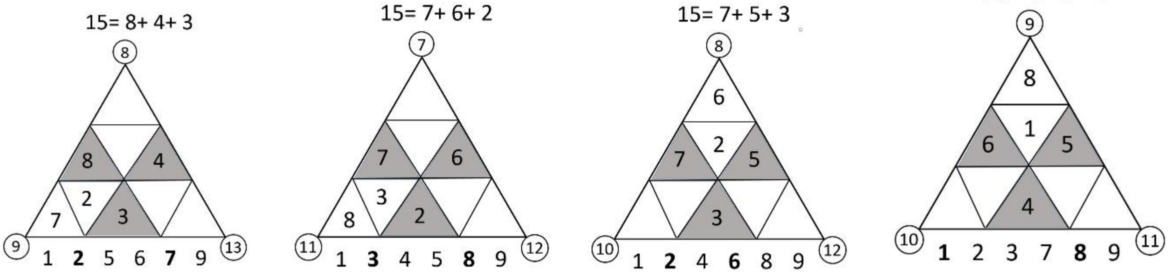
4) Ha S= 20, akkor b+ d+ g= 3(20- 15)= 15. A 15-nek 8 különböző felbontása van, ezek a következők: 15= 9+ 5+ 1, 15= 9+ 4+ 2, 157 8+ 6+ 1, 15= 8+ 5+ 2, 15= 8+ 4+ 3, 15= 7+ 6+ 2, 15= 7+ 5+ 3, 15= 6+ 5+ 4. Ezen felbontások mindegyikére megrajzoljuk az előzőek mintájára a megoldást vizsgáló háromszögeket. Ezek a következő ábrákon láthatók:

15= 9+ 5+ 1 | 15= 9+ 4+ 2 | 15= 8+ 6+ 1 | 15= 8+ 5+ 2



Az első ábrán a 10= 7+ 3 és 14= 8+ 6 összegek miatt megoldást találunk. Ellenőrizhető, hogy a második és a harmadik ábra esetén nincs megoldás. A negyedik ábrán a 10= 9+ 1 és 13= 6+ 7 összeg alapján szintén van megoldás. A további négy ábra a következő:

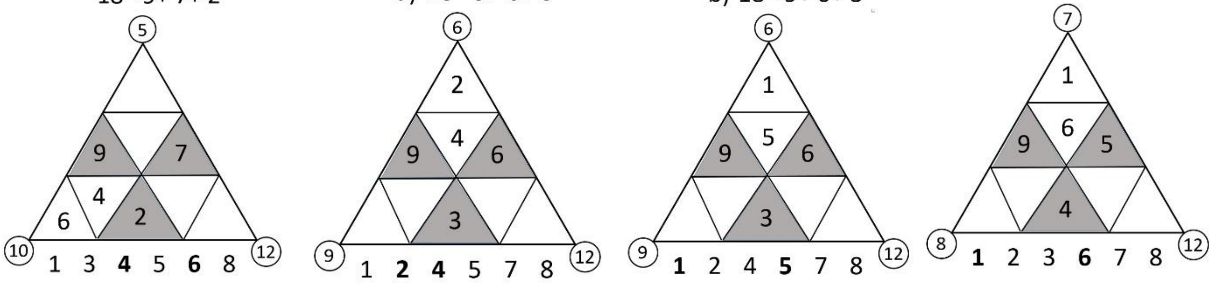
15= 8+ 4+ 3 | 15= 7+ 6+ 2 | 15= 7+ 5+ 3 | 15= 6+ 5+ 4



Az első két ábra esetén belátható, hogy nincs megoldás. A harmadik ábra esetén, mivel 10= 9+ 1 és 12= 8+ 4, ezért van megoldás. A negyedik ábrán szintén van megoldás, mert 10= 7+ 3 és 11= 9+ 2.
Ezek szerint, az S= 20 esetben 4×16= 64 különböző megoldás van.

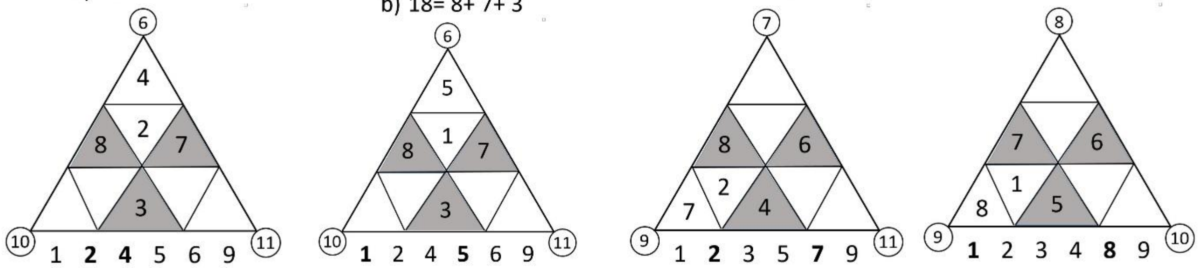
5) Ha S= 21, akkor b+ d+ g= 3(21- 15)= 18. A 18-nak 6 különböző felbontása van, ezek a következők: 18= 9+ 7+ 2, 18= 9+ 6+ 3, 18= 9+ 5+ 4, 18= 8+ 7+ 3, 18= 8+ 6+ 4, 18= 7+ 6+ 5. Ezekre a felbontásra a megoldást vizsgáló ábrák a következők:

18= 9+ 7+ 2 | a) 18= 9+ 6+ 3 | b) 18= 9+ 6+ 3 | 18= 9+ 5+ 4



Az első ábra esetén nincs megoldás. A második és harmadik ábrán látható, hogy 2 megoldás van, hiszen 6= 4+ 2= 5+ 1, 9= 8+ 1= 7+ 2, 12= 7+ 57 8+ 4. A negyedikábra szerint ismét nincs megoldás.

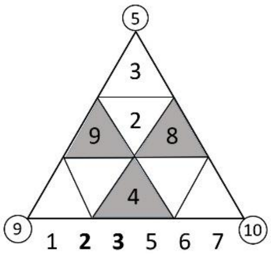
a) 18= 8+ 7+ 3 | b) 18= 8+ 7+ 3 | 18= 8+ 6+ 4 | 18= 7+ 6+ 5



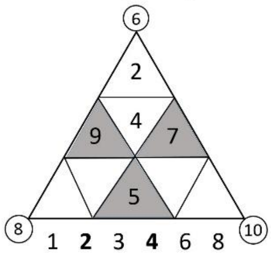
Az első két ábra esetén, mivel 6= 4+ 2= 5+ 1, 10= 9+ 1= 6+ 4, 11= 6+ 5= 9+ 2, ezért van két megoldás. A harmadik és a negyedik ábrák szerint nincs megoldás, ez könnyen leolvasható az ábrákról.
Tehát az S= 21 esetben szintén 4× 16= 64 különböző megoldás van.

6) Ha S= 22, akkor b+ d+ g= 3(22- 15)= 21. Ebben az esetben a 21-nek három különböző felbontása van: 21= 9+ 8+ 4, 21= 9+ 7+ 5, 21= 8+ 7+ 6. Ezekre a felbontásokra a megfelelő ábrák a következők:

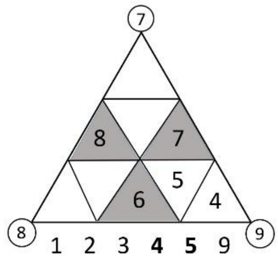
21= 9+ 8+ 4



21= 9+ 7+ 5



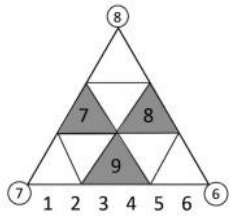
21= 8+ 7+ 6



Az ábrákról könnyen leolvasható, hogy egyik esetben sincs megoldás.

7) Ha S = 24, akkor b+d+g = 24. A 24-nek egyetlen felbontása van, 24 = 7 + 8 + 9. Elkészítjük a megfelelő ábrát. Mivel 8=2+6=3+5, 7=3+4=1+6 és 6=1+5=2+4, így összesen 2 · 16 = 32 megoldás van.

24= 7+ 8+ 9



Összegezve az eddigieket, az S= 17 esetben 16, az S= 18 esetben 0, az S= 19 esetben 3×16= 48, az S= 20 esetben 4×16= 64, az S= 21 esetben 4×16= 64 és az S= 22 esetben 0 különböző megoldás, S=23 esetben 32 megoldás létezik, ezek száma összesen 224. Ismételten kihangsúlyozzuk, hogy egy- egy alapmegoldásból amit lerajzoltunk, úgy kapunk 16 új megoldást, hogy a a b, d, g számokat 2-féle képpen cseréljük, ezek után, egymástól teljesen függetlenül tudjuk cserélni az a és c, az e és f illetve a h és az i számokat is.

Szakirodalom:

[1] Imrecze Zoltánné, Reiman István, Urbán János: Fejtörő feladatok felsősöknek, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., 1999