A Cauchy függvényegyenlet és néhány rokon probléma

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A függvényegyenletek egyik alapegyenlete a Cauchy függvényegyenlet, amely a következő:
„Melyek azok az $f:R\to R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y)=f(x)+f(y)$ egyenletet, minden $x,y\in R$ esetén?” (*)
Noha a függvényegyenletet Cauchy már 1821-ben megoldotta, és azóta számos megoldása látott napvilágot, mégis hasznosnak tartjuk, hogy bemutassuk egy konstruktív megoldását, ugyanis ez a technika számos más függvényegyenlet megoldásánál alkalmazható.

A Cauchy függvényegyenlet megoldása konstruktív módon jól meghatározott lépésekben történi, ezek a következők:
1) A (*) egyenletben legyen x=y=t, ekkor kapjuk, hogy f(2t)=f(t)+f(t)=2f(t). Ha most az x=t és y=2t értékeket adjuk, akkor f(3t)=f(t)+f(2t)=3f(t). Ezek alapján kialakul az a sejtés, hogy f(nt)= nf(t) ahol $n\in N$. Ezt indukcióval bizonyíthatjuk is. Valóban, ha a (*) egyenletbe x=t és y=nt, akkor f(t+nt)=f(t)+f(nt)=f(t)+nf(t)=(n+1)f(t). Tehát f(nt)=nf(t) $\forall n\in N$ és $t\in R$. (**)
2) *Bizonyítani fogjuk, hogy f(x)=ax minden $x\in N$ esetén.*
Ha most a (**)-ban t=1, és f(1)=a, akkor f(n)=an, vagyis f(x)=ax minden $x\in N$ esetén.
3) *Bizonyítani fogjuk, hogy f(x)=ax minden $x\in Z$ esetén.*
Ha a (*)-ban x=y=0, akkor f(0)=f(0)+f(0), ezért f(0)=0. Ha pedig x=t és y= -t, akkor f(0)=f(t)+f(-t) vagyis 0=f(t)+f(-t), ahonnan f(-t)= -f(t). Ha a (**)-ban t helyett –t értéket veszünk, akkor f(-nt)=nf(-t)= -nf(t) adódik, és a t=1 értékre kapjuk, hogy f(-n)= a(-n), vagyis f(x)=ax minden $x\in Z$ esetén.
4) *Bizonyítani fogjuk, hogy f(x)=ax minden $x\in Q$ esetén.*
Ha a (**)-ban $t=\frac{1}{n}$**,** akkor $f(1)=nf\left(\frac{1}{n}\right)$**,** ahonnan $f\left(\frac{1}{n}\right)=a\frac{1}{n}$.
Ha a (**)-ban most $t=\frac{1}{m}$, akkor $f\left(\frac{n}{m}\right)=nf\left(\frac{1}{m}\right)=na\frac{1}{m}=a\frac{n}{m}$, vagyis f(x)=ax $\forall x\in Q$.
5) *Bizonyítani fogjuk, hogy f(x)=ax minden $x\in R\setminus Q$ esetén.*
Legyen $x\in R\setminus Q$ és $x_n\in Q$ úgy, hogy $x_n\to x$. Mivel $x_n\in Q$ ezért $f(x_n)=ax_n$. Ezért a határértékre térve felírható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to\infty} ax_n$, ellenben az f folytonossága miatt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f\left(\lim\limits_{x\to\infty} x_n\right)=f(x)$, így f(x)=ax adódik minden $x\in R$ esetén. Tehát bizonyítottuk, hogy a (*) függvényegyenletet csak az f(x)=ax függvény teljesíti, ahol a= f(1).

A továbbiakban néhány olyan folytonos függvényegyenletet mutatunk be, amelyek visszavezethetők a (*) alapegyenletre.
1. Példa: Melyek azok az $f:R\to R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y)=f(x)+f(y)+b$ egyenletet, minden $x,y\in R$ esetén, ha $b\in R$ adott szám?
Megoldás: Az egyenlet mindkét oldalához adjunk hozzá *b*-t, így ha bevezetjük az f(x)+b=g(x) változócserét, akkor a függvényegyenlet alapján g(x+y)=g(x)+g(y) adódik, aminek a megoldása g(x)=ax, ezért f(x)+b=ax, így f(x)=ax- b és a= f(1)+b.

A következő függvényegyenlet Pexider-féle additív függvényegyenlet nevet viseli.
2. Példa: Melyek azok az $f,g,h:R\to R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y)=g(x)+h(y)$ egyenletet, minden $x,y\in R$ esetén?

Megoldás: Legyen x=y=0, ezért f(0)=g(0)+h(0). Ha most csak x=0, akkor f(y)=g(0)+h(y) (1), Ha pedig csak y=0, akkor f(x)=g(x)+h(0) (2). Összegezve az (1) és (2) összefüggéseket f(x)+f(y)= g(x)+h(y)+g(0)+h(0) adódik, vagyis f(x)+f(y)=f(x+y)+f(0). Észrevehető, hogy az f(0)= -b jelöléssel éppen az előző függvényegyenletet kaptuk, ezért f(x)=ax –b. Így az (1) alapján h(y)= ay –b – g(0) és a (2) alapján g(x)= ax –b – h(0).

A következő példa a Pexider egyenlet általánosabb formája, 3 függvény helyett 4 függvényre, és a bizonyításból kiderül, hogy tovább általánosítható több tag esetén is.

3. Példa: Melyek azok az $\varphi, f, g, h : R \to R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $\varphi(x+y+z) = f(x)+g(y)+h(z)$ egyenletet, minden $x, y, z \in R$ esetén?

Megoldás: Legyen x=y=z=0, azért $\varphi(0) = f(0)+g(0)+h(0)$. Most legyenek rendre csak y=z=0, majd x=z=0, majd x=y=0. Ekkor rendre kapjuk, hogy:
$\varphi(x) = f(x)+g(0)+h(0)$; $\varphi(y) = g(y)+f(0)+h(0)$; $\varphi(z) = h(z)+f(0)+g(0)$. (i) Ha most ezeket összegezzük kapjuk, hogy
$\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z) = f(x)+g(x)+h(x)+2\left[f(0)+g(0)+h(0)\right]$ vagyis
$\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z) = \varphi(x+y+z)+2\varphi(0)$, ahol ha z=0, akkor
$\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(0)$ így az 1. Példa alapján $\varphi(x) = ax+b$ ahol $b = \varphi(0)$. Ha bevezetjük az $f(0) = b_1,\ g(0) = b_2,\ h(0) = b_3$ jelöléseket, akkor az (i) egyenletek alapján kapjuk, hogy $f(x) = ax+b_1$, $g(x) = ax+b_2$, $h(x) = ax+b_3$ és $b_1+b_2+b_3 = b$.

A következő függvényegyenlet Pexider-féle multiplikatív függvényegyenlet nevet viseli.

4. Példa: Melyek azok az $f, g, h : R \to (0,\infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y) = g(x)\cdot h(y)$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Logaritmáljuk az egyenlet mindkét oldalát a természetes alapú logaritmussal. Ekkor $\ln f(x+y) = \ln g(x)+\ln h(y)$ adódik, ami $F(x+y) = G(x)+H(y)$ alakú additív típusú Pexider egyenlet, ennek megoldását már láttuk a 2. Példában, aminek alapján azonnal adódik, hogy a megoldások $f(x) = ab\cdot e^{cx}$, $g(x) = a\cdot e^{cx}$, $h(x) = b\cdot e^{cx}$ alakúak.

Belátható, hogy a multiplikatív Pexider egyenlet is általánosítható 3-nál több függvény esetén is.

A következő három példa függvényegyenlete külalakra és tartalmilag is nagy rokonságot mutatnak a Cauchy függvényegyenlettel.

5. Példa: Melyek azok az $f : R \to (0,\infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x+y) = f(x)f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Logaritmáljuk az egyenlet mindkét oldalát a természetes alapú logaritmussal. Ekkor $\ln f(x+y) = \ln f(x)+\ln g(y)$ adódik, és ha g(x)=lnf(x), akkor $g(x+y) = g(x)+g(y)$, tehát g(x)=ax, ezért $f(x) = e^{ax}$.

6. Példa: Melyek azok az $f : (0,\infty) \to R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x\cdot y) = f(x)+f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Az exponenciális függvény $e^x\cdot e^y = e^{x+y}$ tulajdonságára gondolva vezessük be a következő változócserét: $g(x) = f(e^x)$. Ekkor $g(x+y) = f(e^{x+y})$ és $g(x)+g(x) = f(e^x)+f(e^y) = f(e^x\cdot e^y) = f(e^{x+y})$ vagyis g(x+y)= g(x)+g(y) ezért g(x)=ax vagyis $f(e^x) = ax$ és ha most x helyett $\ln x$-et írunk, f(x)= a lnx adódik.

7. Példa: Melyek azok az $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Most a logaritmus függvény lnx+lny=lnxy tulajdonságára gondolva, vezessük be a $g(x) = \ln f(e^x)$ változócserét. Ekkor $g(x+y) = \ln f(e^{x+y})$ és $g(x) + g(y) = \ln f(e^x) + \ln f(e^y) = \ln f(e^x) \cdot f(e^y) = \ln f(e^x \cdot e^y) = \ln f(e^{x+y})$ ami alapján $g(x+y) = g(x) + g(y)$, tehát $g(x) = ax$, ezért $\ln f(e^x) = ax$ ahonnan $f(e^x) = e^{ax}$ és most az e^x helyett x-et írva kapjuk, hogy $f(x) = x^a$.

8. Példa: Melyek azok az $f:(0,\infty) \to R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x \cdot y) = xf(y) + yf(x)$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Vegyük észre, hogy ha az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk xy-nal, akkor bevezethető a $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ változócsere, és g(xy)= g(x)+g(y) adódik, aminek a megoldása a 6. Példa alapján g(x)= a lnx, tehát $\dfrac{f(x)}{x} = a \ln x$ ahonnan $f(x) = ax \ln x$.

9. Példa: Határozzuk meg azokat az $f: R \to R$ függvényeket, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

a) f folytonos az R-en

b) $\lim\limits_{t\to\infty}\left[f(t) - t\right] = \infty$

c) $f(x+y) = f(x)f(y) - xf(y) - yf(x) + xy + x + y$ minden valós x, y értékre, és f(1)=e +1.

Megoldás: Könnyen észrevehető, hogy ha bevezetjük a g(x)= f(x) –x változócserét, akkor g(x+y)= g(x)g(y) ezért az 5. példa alapján g(x)= e^{ax} ahonnan $f(x) = e^{ax} + x$. A b) feltételből $k \neq 0$ és az f(1)=e +1 alapján k=1, tehát $f(x) = e^x + x$.

10. Példa: Határozzuk meg azokat az $f: R \to R$ folytonos függvényeket, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a} = e^a$, ahol a=állandó

2) $(x-a)(y-a)f(x+y) = (x+y-a)f(x)f(y)$ minden valós x, y értékre.

Megoldás: Vezessük be a következő segédfüggvényt: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x-a} & x \neq a \\ e^a & x = a \end{cases}$. Az 1) alapján ez folytonos, és a 2) alapján teljesül a g(x+y)=g(x)g(y) függvényegyenlet, így az 5. példa alapján $g(x) = e^{ax}$, és g(a)=1, ezért a változócsere alapján $f(x) = (x-a) \cdot e^x$.

A következő függvényegyenlet a Jensen-féle függvényegyenlet nevet viseli.

11. Példa: Melyek azok az $f: R \to R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Végezzük ez az x helyett az x+y helyettesítést, így kapjuk, hogy $f\left(\dfrac{x+2y}{2}\right) = \dfrac{f(x+y) + f(y)}{2}$. Legyen most y=0, ezért $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{f(x) + f(0)}{2}$ adódik. Most helyettesítsük az x-et (x+y)-nal, ezért $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x+y) + f(0)}{2}$, és az eredeti függvényegyenlet alapján kapjuk, hogy $f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y)$ és az 1. Példa alapján kapjuk, hogy f(x)=ax+b ahol a= f(1)+ f(0) és b=f(0).

12. Példa: Melyek azok az $f: R \to (0,\infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)\cdot f(y)}$ egyenletet, minden $x, y \in R$ esetén?

Megoldás: Végezzük ez az x helyett az x+y helyettesítést, így kapjuk, hogy

$f\left(\frac{x+2y}{2}\right)=\sqrt{f(x+y)\cdot f(y)}$. Legyen most y=0, ezért $f\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{f(x)\cdot f(0)}$ adódik. Most helyettesítsük az x-et (x+y)-nal, ezért $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x+y)\cdot f(0)}$ ahonnan felírható, hogy $f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x+y)\cdot f(0)=f(x)\cdot f(y)$ és logaritmálva kapjuk, hogy $\ln f(x+y)\cdot f(0)=\ln f(x)\cdot f(y)$ vagyis $\ln f(x+y)+\ln f(0)=\ln f(x)+\ln f(y)$ ahol bevezetve a g(x)=lnf(x)-lnf(0) változócserét a g(x+y)=g(x)+g(y) adódik, így g(x)=ax ezért $\frac{f(x)}{f(0)}=e^{ax}$ ahonnan $f(x)=\alpha\cdot e^{ax}$, ahol $\alpha=f(0)$ és $a=\ln\frac{f(1)}{f(0)}$.

13. Példa: Melyek azok az $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x)+f(y)=f\left[(x^n+y^n)^{\frac{1}{n}}\right]$ egyenletet, minden $x, y \in R_+$, $n \in N$ esetén?

Megoldás: Az n=1 esetén visszakapjuk a Cauchy függvényegyenletet, amelynek a megoldása f(x)=ax. Legyen most $n \geq 2$. Helyettesítsük x-et $\sqrt[n]{x}$ -el és az y-t $\sqrt[n]{y}$ -nal. Ekkor felírható, hogy $f(\sqrt[n]{x})+f(\sqrt[n]{y})=f(\sqrt[n]{x+y})$. Vezessük be most a $g(x)=f(\sqrt[n]{x})$ változócserét. Ekkor kapjuk, hogy g(x+y)= g(x)+g(y), aminek a megoldása g(x)=ax, ezért $f(\sqrt[n]{x})=ax$ ahonnan $f(x)=ax^n$ adódik, ahol a= f(1).

14. Példa: Melyek azok az $f: R\to(-\infty,1)$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az f(1)= -1, f(x+y)= f(x) + f(y) – f(x)f(y) függvényegyenletet, minden valós x, y esetén?

Megoldás: Vezessük be a g(x)= ln(1-f(x)) változócserét. Számolással azonnal adódik, hogy g(x+y)=g(x)+g(y), ezért g(x)=ax, így $f(x)=1-e^{ax}$. Az f(1)= -1 alapján a=ln2, így $f(x)=1-2^x$.

15. Példa: Melyek azok az $f:(-1,1)\to R$ folytonos függvények, amelyek teljesítik az $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ minden x, y∈ $(-1,1)$ esetén?

Megoldás: Emlékeztetünk arra, hogy $th(\alpha+\beta)=\frac{th\alpha+th\beta}{1+th\alpha\cdot th\beta}$, ahol $thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Ezért végezzük el az $x=th\alpha$ és $y=th\beta$ helyettesítéseket. Ekkor az eredeti függvényegyenletből, az említett számolási képlet alapján $f(th\alpha)+f(th\beta)=f(th(\alpha+\beta))$ adódik, így ésszerű a $g(x)=f(thx)$ változócsere mindek alapján g(x+y)=g(x)+g(y) adódik, aminek a megoldása g(x)=ax, ezért f(thx)=ax, ahonnan f(x)=a (arcthx).

Befejezésül megjegyezzük, hogy különféle változócserékkel, a Cauchy függvényegyenletből bárki szerkeszthet az előbbire visszavezethető függvényegyenletet.

Szakirodalom

[1] C. Ionesci-Tiu, Liviu Parsan: Calcul diferential si integral pentru admitere in facultate, Editura Albatros, 1975

[2] Mihai Onucu Drimbe: 200 de ecuatii functionale pe N, Z, Q, Editura Gil, 2003