

A diofantikus egyenletek nevüket Diophantos, 3. században élt görög matematikusról kapták, aki Aritmetika című művében először foglalkozott azzal, hogy egy egyenlet (vagy egyenletrendszer) egész megoldásait megkeresse – azaz a diofantikus egyenletekkel. Az ilyen egyenletek az aritmetika megjelenése óta komoly feladat elé állították a matematikusok népes seregét, és nemritkán az ilyen egyenletek feltörhetetlen diónak látszottak. Az ún. Fermat-féle

$$x^n + y^n = z^n \quad (n \geq 3)$$

egyenletről a mai napig nem tudjuk, hogy elég nagy n -ekre van-e pozitív egészekből álló (x, y, z) megoldása. Napjainkban egy fiatal német matematikus, *Gerd Faltings* egy viszonylag új matematikai apparátussal – az algebrai görbék elméletével – lényegesnek látszó lépést tett a Fermat-féle egyenlet megoldhatóságának eldöntésére. Bebizonyította, hogy $n \geq 4$ esetén a fenti egyenletnek legfeljebb véges sok, páronként relatív prím egész számokból álló (x, y, z) megoldáshármasa van

Nyomban felmerül az a kérdés, hogy mi a helyzet az

$$(1) \quad x^m + y^m = z^n \quad m, n \geq 2 \text{ egészek és } (m, n) = 1,$$

valamint

$$(2) \quad x^p + y^q = z^r \quad p, q, r \geq 2 \text{ egészek és } (p, q) = (p, r) = (q, r) = 1$$

egyenletek esetén, hány pozitív egészekből álló megoldásuk van?

Az ezeknél általánosabb

$$(A) \quad x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + \dots + x_k^{p_k} = x_{k+1}^{p_{k+1}}, \quad k \geq 2, p_i \geq 2 \text{ egész és } (p_i, p_j) = 1 \text{ minden } 1 \leq i < j \leq k+1 \text{ esetén,}$$

illetve

$$(B) \quad x_1^p + x_2^p + \dots + x_k^p = x_{k+1}^q, \quad p, q \geq 2 \text{ egész és } (p, q) = 1$$

egyenletekről fogjuk bebizonyítani, hogy mind az (A), mind a (B) típusú egyenleteknek végtelen sok természetes egészekből álló (x_1, x_2, \dots, x_k) megoldása van.

Először az (A) egyenlettel foglalkozunk. Ennek megoldásait keressük az alábbi alakban:

$$(a1) \quad x_i = k^{\alpha_i} \quad 1 \leq i \leq k+1,$$

ahol legyen α_i olyan egész szám, hogy

$$(a2) \quad \alpha_i p_i = \lambda \quad 1 \leq i \leq k,$$

valamilyen fix λ -ra. Ezekkel az (A) a következőképpen alakul:

$$(a3) \quad k \cdot k^\lambda = k^{p_{k+1}\alpha_{k+1}},$$

ami azt jelenti, hogy

$$(a4) \quad p_{k+1}\alpha_{k+1} - \lambda = 1.$$

Az (a2) miatt $p_i | \lambda$, és $i \neq j$ mellett $(p_i, p_j) = 1$, így $p_1 p_2 \dots p_k | \lambda$, azaz létezik olyan q pozitív egész, amelyre $p_1 p_2 \dots p_k q = \lambda$. Jelölje P a $p_1 p_2 p_3 \dots p_k$ szorzatot. (a2)-ből

$$\alpha_i = p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_k q = \frac{P}{p_i} q,$$

és (a4)-ből

$$(a5) \quad p_{k+1}\alpha_{k+1} - p_1 p_2 \dots p_k q = p_{k+1}\alpha_{k+1} - Pq = 1.$$

Ismeretes, hogy ha $(a, b) = 1$, akkor az $ax - by = 1$ elsőfokú, diofantikus egyenletnek végtelen sok (x, y) egészekből álló megoldása van, és valamennyi megoldás

$$(a6) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + bt \\ y &= y_0 + at \end{aligned}$$

alakban írható fel, ahol (x_0, y_0) egy tetszőleges megoldás, t pedig valamilyen egész szám. (Lásd: dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet. 151. oldal, Tankönyvkiadó). Ha most a és b pozitívak, akkor van olyan t' pozitív egész, amely

mellett minden t' -nél nem kisebb t -re az (a6) szerint adódó x és y is pozitív, azaz végtelen sok pozitív egész megoldása van az $ax - by = 1$ egyenletnek.

Visszatérve (a5)-re, mivel $(p_i, p_j) = 1 (i \neq j)$, ezért $(p_{k+1}, P) = 1$ is igaz, így az (a5) egyenletnek végtelen sok (α_{k+1}, q) pozitív egész megoldása van, és a megoldások

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= \alpha_0 + p_1 p_2 \dots p_k t = \alpha_0 + Pt, \\ q &= q_0 + p_{k+1} t\end{aligned}$$

alakban írhatók, ahol $t > \max \left(-\frac{\alpha_0}{P}, -\frac{q_0}{p_{k+1}} \right)$ és egész, α_0, q_0 pedig (a5)-nek egy tetszőleges megoldása. Az (a1)–(a5) egyenletekből nyert

$$x_i = k^{p_1 p_2 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_k (q_0 - p_{k+1} t)} = k^{\frac{P}{p_i} (q_0 + p_{k+1} t)} \quad 1 \leq i \leq k$$

és

$$x_{k+1} = k^{p_1 p_2 \dots p_k t + \alpha_0} = k^{Pt + \alpha_0}$$

szolgáltatják az (A) egyenletnek végtelen sok pozitív egész megoldását.

Rátérve most a (B) egyenletre, ennek megoldásait

$$(b1) \quad x_i = k^\alpha, \quad x_{k+1} = k^\beta$$

alakban keressük, ahol α és β meghatározandó pozitív egészek.

$$(b2) \quad k \cdot k^{\alpha p} = k^{\beta q},$$

ami akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(b3) \quad q\beta - p\alpha = 1.$$

Mivel $(p, q) = 1$, ezért a már idézettek miatt (b3)-nak végtelen sok egész megoldása van, és minden megoldás

$$(b4) \quad \begin{aligned}\beta &= \beta_0 + pt, \\ \alpha &= \alpha_0 + qt\end{aligned}$$

alakú, ahol (α_0, β_0) egy megoldása (b3)-nak, t pedig tetszőleges egész. Ha most $t > \max \left(-\frac{\beta_0}{p}, -\frac{\alpha_0}{q} \right)$, akkor (b4) pozitív egész megoldást szolgáltat. (b3)-nak végtelen sok pozitív egész megoldása van, s így (b1) miatt

$$(1 \leq i \leq k) \quad x_i = k^{\alpha_0 + qt}, \quad x_{k+1} = k^{\beta_0 + pt}$$

a (B) egyenletnek végtelen sok pozitív egész megoldását adja.

Könnnyen látható, hogy az alábbi két egyenletnek is végtelen sok természetes szám megoldása van:

$$(C) \quad x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + \dots + x_k^{p_k} = x_{k+1}^{p_{k+1}} + x_{k+2}^{p_{k+2}} + \dots + x_{k+r}^{p_{k+r}} \quad (r \neq k),$$

$$(D) \quad x_1^p + x_2^p + \dots + x_k^p = x_{k+1}^q + x_{k+2}^q + \dots + x_{k+r}^q \quad (r \neq k),$$

ha a kitevőkre az (A) illetve (B)-ben felírt megszorítások fennállanak. Ezeket az egyenleteket ugyanis az (A), illetve (B) típusúakra vezethetjük vissza, ha az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy $k > r$, továbbá az $s = k - r + 1$ jelöléssel

$$x_{s+1}^{p_{s+1}} = x_{k+2}^{p_{k+2}}, \dots, x_k^{p_k} = x_{k+r-1}^{p_{k+r-1}}.$$

Módszerünk sajnos alkalmatlan a Fermat-féle egyenlet tárgyalására, hiszen lényegesen kihasználtuk a kitevők relatív prím voltát.