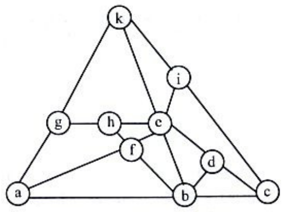
Egy érdekes logikai feladatról
(A MatLap A:1872-es feladata kapcsán)

Tuzson Zoltán



A MatLap 5/2007-ban megjelent az A:1872-es feladata a következő: „A mellékelt ábrán a,b, …, k olyan természetes számok, amelyekre a tíz egyenes mindegyikén a számok összege 15.

a) Ha k=2, akkor igazoljuk, hogy e=5, majd határozzuk meg a többi számot.
b) Igazoljuk, hogy e=5, bármely k szám esetén”

A feladat kapcsán a következő kérdéseink merülhetnek föl:

1) A feladat feltételei mellett (vagyis, ha a, b, …, k mind természetes számok), mit mondhatunk az a, b, …, k számok értékeiről?

2) A feladat feltételei mellett (vagyis, ha a, b, …, k mind természetes számok), meghatározhatók-e az a, b, …, k számok?

A továbbiakban mindkét kérdést megválaszoljuk. Írjuk fel a 10 szóbanforgó összeget, ezek (a sorrendtől eltekintve), a következők:

(1) a+ g+ k= 15, (2) a+ b+ c= 15, (3) k+ i+ c= 15, (4) g+ h+ e= 15, (5) h+ f+ b= 15, (6) a+ f+ e= 15, (7) c+ d+ e= 15, (8) k+ e+ b= 15, (9) b+ d= 15, (10) i+ e= 15.

A (4), (6), (7), (8), (10) egyenletek mindegyikében szerepel az „e” betű. Ennek az 5 egyenletnek a megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy 5·e+a+f+g+h+k+b+i+d+c=75 amit átrendezve így írhatunk: 3·e+(a+g+k)+(h+f+b)+(e+i)+(e+d+c)=75 (*) . De az (1), (5) és (7) alapján a+g+k=h+f+b=e+i=e+d+c=15, ezért a (*) összefüggésből 3e+4·15=75, azaz e=5 adódik, továbbá a (10)-es összefüggés alapján i= 10. Tehát egy érdekes jelenség áll fenn: függetlenül a többi betű természetes számot jelképező értékeitől, *mindenesetben* e= 5 és i= 10.

Térjünk most rá a második kérdésünk megválaszolására! Ebből a célból próbáljuk kifejezni mindegyik betű értékét *egy ugyanazon betű* (paraméter) függvényében!

A (3) alapján c= 5-k; a (3) és (7) alapján d= k+ 5; a (8) és (9) alapján pedig d= k+ 5. A (2) alapján a= 15-(b+c)= 2·k, a (6) alapján f= 10- a= 10- 2·a; az (1) alapján g= 15- a – k= 15- 3·k és a (4) alapján h= 3·k- 5, ahol mindenesetben k egy természetes számot jelöl. A kapott értékeket így foglalhatjuk táblázatba:

k	a	b	c	d	e	f	g	h	i
k	2·k	10- k	5- k	5+ k	**5**	10- 2·k	15- 3·k	3k- 5	**10**

Azonban 3k- 5≥0 ezért k≥ 2, továbbá 5- k≥ 0 ezért k≤ 5, és mivel k∈N, ezért k∈{2, 3, 4, 5}. A k szám ezen értékeire kapott többi betű értékét az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

k	a	b	c	d	e	f	g	h	i
2	4	8	3	7	**5**	6	9	1	**10**
3	6	7	2	8	**5**	4	6	4	**10**
4	8	6	1	9	**5**	2	3	7	**10**
5	10	5	0	10	**5**	0	0	10	**10**

A megadott feltételek mellett ezek a számok képezik a feladat összes megoldását. Érdemes észrevenni, hogy k= 2 és k= 4 esetén *csupa különböző* számokból álló megoldásokat kaptunk, és k=5 esetén a kitöltés *csak* a 0, 5 és 10 számokkal történt.

Érdekes felfigyelnünk arra, hogy mindezeket (a 15-ös összegek mellett) csupán csak azon megszorító feltételek mellett kaptuk, hogy a, b, …, k mind természetes számok!