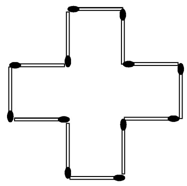
Egy gyufarejtvény kapcsán

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

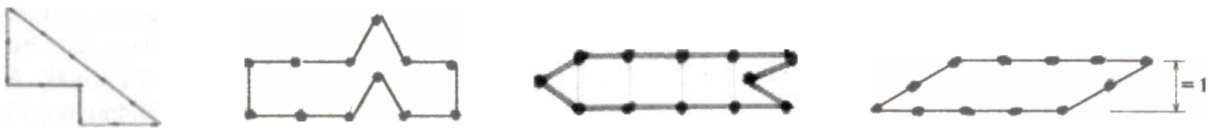
Minden bizonnyal a tisztel Olvasók között kevesen vannak olyan személyek, akik életük során ne találkoztak volna valamilyen gyufarejtvénnyel. Ezek napjainkban is egyre divatosabbak, ötletesebbek lettek, ugyanis a megoldásuk érdekében konkrét cselekvéssel is próbálkozhatunk. Legtöbbször gyufaszálat (szálakat) kell elmozdítanunk és átrendeznünk, hozzáadnunk vagy elvennünk úgy, hogy egy adott eredményhez, helyzethez jussunk. És ez nem is mindig könnyű, nemritkán egy-egy rejtvénynek több megoldása is van, ötletesebbnél ötletesebbek. Jelen dolgozat kiindulópontját is éppen egy gyufarejtvény képezi.

Egy gyufarejtvény és megoldása:

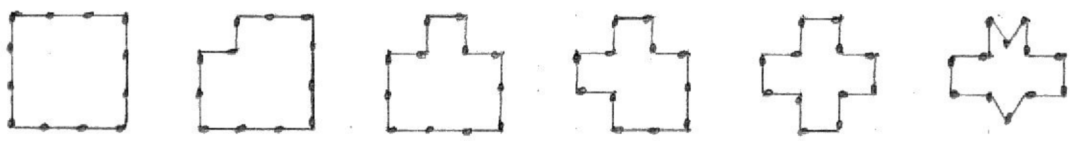


A mellékelt ábra szerint, a 12 darab 1 egységnyi gyufaszálból olyan keresztet alkottunk, amelynek a területe 5 gyufanégyzetből áll. Lehetséges - e, hogy a 12 gyufaszál maradéktalan és fedés nélküli felhasználásával olyan alakzatot alakítsunk ki, amelynek a területe csak 4 gyufanégyzet de a kerülete 12 gyufaegység maradjon?

A válasz igenlő. A feladványnak több megoldása is van, íme néhány:



A feladvány kapcsán, egy kis kíváncsisággal talán megpróbálhatnánk a 12 gyufából még sok más alakzatot is kirakni, amelyeknek figyelnénk a területét. Íme néhány alakzat:



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

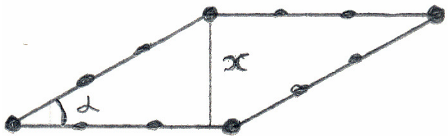
(7) (8) (9) (10) (11)

Az (1) -(11) ábrákon látható sokszögek területei rendre: 9; 8; 7; 6; 5; 4; $4-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 3{,}14$; 3, $3-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}14$; 2; $\sqrt{3}\approx 1{,}73$ gyufanégyzet. Figyelemmel kísérve, hogy a kirakott alakzatok területük és formájuk még nagyon sokféle képpen változhat, természetesen tehetünk fel néhány kérdést.

Kérdések az előző gyufarejtvény kapcsán:

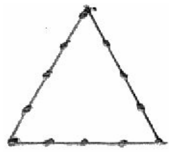
1) Vajon mekkora lehet a legkisebb kirakható, 12 egység kerületű alakzatnak a területe?
2) Vajon mekkora lehet a legnagyobb kirakható, 12 egység kerületű alakzatnak a területe?
3) Az illető korlátok között vajon milyen területértékeket vehetnek fel konkrétan a kirakott, 12 egység kerületű alakzatok?

Próbálkozások és kísérletezések:
A bemutatott 11 ábra alakzatainak szerkesztése alapján aligha akad olyan ötletünk, amellyel biztosan eldönthetnénk, hogy mikor is értünk el a legkisebb területű sokszöghöz. Más kísérletezési utat kell választanunk. Erre talán tippet adhat a bemutatott gyufafeladvány negyedik megoldásánál levő paralelogramma. Vagy éppen egy más paralelogramma. Hogy miért? Azonnal meglátjuk. Az (1) ábra 3×3-as négyzete helyett tekintsünk egy 3×3-as paralelogrammát. Ezt tekintsük úgy, hogy **a 4 sarkában (és csak itt) „csuklósan mozgatható”**. Ekkor tehát akár a paralelogramma hegyesszögének α mértékét változtatjuk, akár a paralelogramma x magasságának a hosszát. Ha ez utóbbit választjuk, akkor a paralelogramma területe $T = 3\cdot x$ gyufanégyzet. Tekintsük az f: (0; 3] → (0; 9] és $f(x)= 3\cdot x$ képlettel értelmezett függvényt. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy bármely $T \in$ (0; 9] területmértéket kifejező szám esetén létezik olyan x∈ (0; 3] amelyre $T= 3\cdot x$, ez a létező x érték éppen az előre megválasztott T-re számítva $x = \frac{T}{3} \in$ (0; 3]. Ezáltal tulajdonképpen az f függvény szürjektivítását ellenőriztük, és három fontos következtetést vonhatunk le:

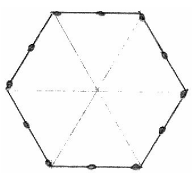


1°) A „csuklósan mozgatható” paralelogramma x magasságának a csökkentése által, a T értéke bármilyen kicsi (pozitív) szám lehet, a kerülete persze 12 gyufából áll.
2°) Bármilyen előre választott $T \in$ (0; 9] területnagyság esetén megválaszthatjuk a „csuklósan mozgatható” paralelogramma magasságát úgy, hogy annak területe éppen T legyen. Vagyis az x változó értékei szerint bármely $T \in$ (0; 9] terület esetén kirakható a 12 gyufahossz kerületű paralelogramma (és még csak nem is konkáv sokszögek, amint az (1)-(11) ábrák esetén láthattuk), amelynek a területe éppen T.
3°) A legnagyobb területű „csuklósan mozgatható” paralelogrammát akkor kapjuk, amikor $x = 3$, vagyis a paralelogramma egy 3×3-as négyzet.

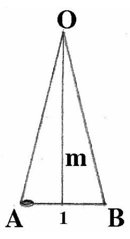
Próbáljunk most elgondolkodni, hogy milyen alakzatot kellene kirakjunk ahhoz, hogy a lehető legnagyobb területet kapjuk? Ha az előző három következtetésből jól megfigyeljük, hogy ott a 3×3-as négyzet területe lett az adott feltételek mellett a legnagyobb, akkor talán hamarosan beugrik a mentő ötlet: mivel a négyzet szabályos négyszög, rakjunk ki a 12 gyufaszálból más szabályos sokszöget.
Leghamarabb belátható, hogy éppen kirakható olyan szabályos háromszög, amelynek az oldalhossza 4 gyufaegység. Ennek a területe $T_3 = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 4\cdot\sqrt{3} \approx 6,92$ és ez jóval kisebb 9.



Hát akkor rakjunk ki 4-nél több oldalú konvex szabályos sokszöget. A 12 gyufaszálból kirakható például a 2 gyufaegység oldalhosszú szabályos hatszög. Ennek a területe 6 szabályos háromszög területe, amelynek oldalhossza 2 gyufaegység, vagyis $T_6 = 6\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 6\cdot\frac{2^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 6\cdot\sqrt{3} \approx 10,38$ és ez már több mint a 9.



Tehát jó lenne még több oldalú konvex szabályos sokszöget kiraknunk, pontosabban a lehető legtöbb oldalút!
Igen, és ez lehetséges is, hiszen a 12 gyufaszállal kirakható egy 1 gyufaegység oldalú szabályos 12-szög. Legyen ennek a középpontja O, és két egymás utáni csúcsa A és B. Legyen az O-ból húzott magasság ossza m. Mivel az AOB ∢= 30°, ezért $m = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{tg15^\circ} = \frac{1}{2(2-\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. Így a szóbanforgó szabályos tizenkétszög területe $T_{12} = 12\cdot\frac{1\cdot m}{2} = 3\cdot(2+\sqrt{3}) \approx 11,19$. És ez még több mint a T_6 értéke.



Természetesen merül fel a kérdés: kaphatunk-e még a T_{12}-nél is nagyobb számot? Az intuíciónk azt sugallja, hogy nem valószínű! De hogyan bizonyíthatnánk? Nem túl könnyen, hiszen az elemzésünk során a matematikának egy kevésbé elemi témakörébe csöppentünk, az úgynevezett izoperimetrikus probléma témakörébe. Pillantsunk hát bele ennek a területnek azon részeibe amelyek számunkra most fontosak.

A síkbeli izoperimetrikus probléma rövid ismertetése:

Az „izoperimetrikus” szó az izo = állandó, periméter = kerület szóösszetételből ered. Egyszerűen fogalmazva, a probléma a következő:

a) Mekkora területet lehet körülkeríteni egy adott hosszúságú kötéllel?
b) Adott hosszúságú kötél által határolt síkidomok közül melyiknek a legnagyobb a területe?
c) Adott kerületű síkidomok közül melyiknek a legnagyobb a területe?

Közöttük csupán formai, megfogalmazásbeli különbség van, a választ mindegyikre hasonló módon adhatjuk meg.

A síkbeli izoperimetrikus tétel a következő:

1. Tétel: Az ugyanakkora kerületű síkidomok közül a kör területe a legnagyobb. (v.ö. [1], 13. oldal). A tétel amilyen egyszerűen és nagyszerűen „hangzik”, ennek ellenére, a mai napig nem született rá igazán elemi bizonyítás. Mielőtt a probléma, és a tétel történelmi vonatkozásáról írnánk, fogalmazzunk meg *a sokszögek izoperimetrikus tételei* közül kettőt:

2. Tétel: Adott oldalszámú és adott kerületű sokszögek közül a szabályos sokszög a legnagyobb területű (v. ö [2], 201. oldal).

3. Tétel: Adott, ugyanakkora kerületű sokszögek közül, nincs egy legnagyobb területű. (v.ö.[1], 34., 46. és 71. oldal). Részletesebben fogalmazva, egy többetmondó eredmény: Egy ugyanakkora kerületű n-oldalú és (n+1)-oldalú szabályos sokszögek közül az utóbbinak a területe a nagyobb. (v.ö.[2], 201. oldal). Ez utóbbi kijelentésnek mondjuk van némi intuitív alapja is, hiszen ha egy adott körbe egyre nagyobb oldalszámmal rendelkező szabályos sokszöget írunk, akkor ennek a területe egyre „közelebb kerül” a kör területéhez, de az 1. Tétel értemében ezt nem éri el.

Mindenek előtt lássunk azonban néhány történelmi áttekintést.(v.ö. [1], 24. oldal). A monda szerint az izoperimetrikus probléma eredete a következő: *Dido*, *Tyrosz* királyának lánya volt. Nagybátyjához, *Acerbászhoz* ment feleségül, akit azonban mesés vagyona miatt hamarosan meggyilkoltak. Dido ekkor *Acerbász* kincseivel együtt Ciprusra menekült, majd innen tovább hajózott Afrika Szicíliához közeli partjaira. Elment a vidék uralkodójához és elmondta neki, hogy szeretne a tengerpart mentén egy földdarabot vásárolni, de nem nagyobbat, mint amekkorát egy marhabőrrel körül tud keríteni. Az uralkodó mosolyogva beleegyezett a szépséges királynő kérésébe, sőt nagylelkűen még meg is ajándékozta egy jókora marhabőrrel. Az okos *Dido* keskeny csíkokra vágta azt szét és a szeleteket összecsomózva olyan hosszú kötélhez jutott, amelyikkel jóval nagyobb (tengerbenyúló) földterületet lehetett elkeríteni a tengerparton, mint amekkorát az uralkodó elképzelt. Így alapította meg Karthágó virágzó városát, aminek később ő lett a királynője.

A görög matematikusok közül *Zenodórosz* már i.e. 150 évvel foglalkozott izoperimetrikus alakzatokkal, és 14 ebbe a témakörbe tartozó tételt bizonyított be, többek között az előbbiekben leírt 2. Tételt is (v.ö. [1], 24. oldal). Az „Izoperimetrikus alakzatok” című könyve sajnos elpusztult, de az ő eredményeit újra ismertette és bebizonyította az alexandriai *Papposz* i.sz. 300 körül.

A középkorban számos neves matematikus foglalkozott ezzel a témakörrel. Néhány híres nevet említve: *Descartes* (1596-1650), *Jacob Bernoulli* (1645-1705*), Johann Bernoulli* (1667-1748), *Euler* (1707-1783), *Lagrange* (1736-1813), és mások Kétségtelenül *Jacob Steiner* (1796-1863) svájci matematikus volt az, akinek a munkássága a korábbi eredmények betetőzését jelentette, szintetizálta a korábbi eredményeket, új ötletekkel gazdagította e problémakört, de mindegyikük (akárcsak *Zenodórosz* is), nyilvánvalónak tartotta és nem bizonyította azt, hogy létezik megoldása ennek a problémának. (v.ö. [1], 9. oldal). Dirichlet (1805-1859) vette észre először az izoperimetrikus tétel eddigi bizonyításának a hiányosságát, és csak 1870-ben, Weierstrass (1815-1892) küszöbölte ki ezt, ugyanis szigorúan bebizonyította a kör nevezetes szélsőértéktulajdonságát. (Érdekes módon, [4]-ben a steineri gondolatmenetet bizonyító erejűnek fogadják el, v.ö. [1], 25. oldal). Egész munkássága matematikai szempontból forradalmi változásokat eredményezett. Ezek után számos más matematikus foglalkozott a probléma különböző bizonyításával (v. ö. [1], 26. oldal), de mindmáig egyetlen igazán elemi bizonyítás sem született.

Válaszok a föltett kérdésekre:

A kísérletezéseink során bebizonyítottuk, hogy a 12 gyufaszál segítségével *bármilyen kis területű* (de 12 gyufahossz kerületű) alakzat (sajátos esetben „csuklósan mozgatható” paralelogramma) kirakható. Sőt mi több: *bármely* (0; 9] gyufanégyzet területtel rendelkező paralelogramma kirakható. A már bemutatottak mellett, ezt még a „csuklósan mozgatható” paralelogramma α szögének változtatásával is elérhetjük, hiszen $T = 3 \cdot x = 9 \cdot \sin\alpha$ és szimmetria okok miatt elegendő ha az $\alpha \in (0; 90°]$ vizsgáljuk, és ekkor sin α minden értéket fölvesz a (0;1] intervallumból. A maximális területű sokszög kirakhatóságára csak a **2. Tétel** és a **3. Tétel** ad végleges választ: valóban, a kísérletezéseink során vizsgált 12 oldalú szabályos konvex sokszög esetén kapjuk a legnagyobb területet és ez $3 \cdot (2+\sqrt{3})$ gyufanégyzet, hiszen a 12 gyufaszálból ez a legtöbb oldallal rendelkező szabályos sokszög ami kirakható. Tehát a kirakható 12 gyufahossz kerületű sokszögek területe a $(0; 3 \cdot (2+\sqrt{3})\,]$ intervallumba esik. Nem adtunk azonban választ arra a kérdésre, hogy igaz-e, bármely $(9; 3 \cdot (2+\sqrt{3}))$ gyufanégyzet területtel rendelkező sokszög is kirakható? Mivel úgy gondoljuk, hogy ennek a megválaszolása ha elemi is lenne, nem lenne rövid bizonyítás, ezért ennek a problémának a vizsgálását az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

Szakirodalom:

[1] Major Zoltán: Egy izgalmas szélsőértékfeladat-család (Az izoperimetrikus problémakör), Szignatúra Kft., Szombathely, 1993

[2] Pólya György: Indukció és analógia (A matematikai gondolkodás művészete I.), Gondolat kiadó, Budapest, 1988 (191.- 214. old)

[3] Nicholas D. Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek, Gondolat Kiadó, 1980 (66.-96. old)

[4] Dr. Lévai László-Sain Márton: Matematikatörténeti feladatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982 (200.-201. oldal 306. feladat)