EGY HATÁRÉRTÉK KISZÁMÍTÁSÁRÓL

Írta: **Tuzson Zoltán** tanár, Székelyudvarhely

Az ML 7/1979. számában 17841. sorszámmal az alábbi feladatot tűzték ki: Ha $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, akkor számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ határértéket.

Mivel a Matematikai Lapok hasábjain, valamint matematikai versenyeken többször került sor hasonló típusú feladatokra, tehát $(a+b\sqrt{c})^n = a_n + b_n\sqrt{c}$, alakúakra, mindazok mellett, hogy a feladat megoldása nem okoz semmilyen nehézséget, hasznosnak találom, sőt tanulságosnak is, bemutatni a feladatnak *nyolc* különböző megoldását, amelyek természetesen általánosabb keretek között is alkalmazhatók.

1. megoldás

Mivel $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, Newton binominális képlete alapján fennáll az $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ egyenlőség is, és a fenti két összefüggést összeadva, illetve kivonva, kapjuk, hogy:

$$a_n = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n], \text{ illetve } b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n]$$

Tehát:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\,\frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n} = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n} = \sqrt{2},$$

hiszen az utóbbi határérték értéke egy, mivel $|(1-\sqrt{2}):(1+\sqrt{2})| < 1$. Mutassuk be most a feladatnak, talán egyik legrövidebb megoldását.

2. megoldás

Mivel $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ és $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$, észrevehetjük (összeszorozva a két kifejezést), hogy a_n és b_n kielégítik az $a^2 - 2b^2 = 1$ Pell-egyenletet, vagyis $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$. (*)

Vegyük észre, hogy az $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ alakú kifejezésben b_n pozitív binomiális együtthatók összege és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Ezek szerint a (*) alapján $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 = 2 + \frac{1}{b_n^2}$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 = 2$, ahonnan $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

A továbbiakban három olyan megoldást mutatunk be, amelyeknél az alábbi rekurziós összefüggéseket használjuk fel:

Mivel $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2})$, ezért $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ (1) $b_{n+1} = a_n + b_n$ (2), valamint

$$\begin{matrix} a_0 = a_1 = 1 \\ b_0 = 0,\ b_1 = 1 \end{matrix} \qquad (3)$$

3. megoldás

A feladatot a Stolz-Cezaro lemma segítségével oldjuk meg, felhasználva az (1) és (2) rekurziós összefüggéseket.

A lemma alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+2b_n-a_n}{a_n+b_n-b_n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{2}{x} = x = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}.$$

Tehát $x^2 = 2$, azaz $x = \sqrt{2}$, hiszen $a_n, b_n > 0$.

Megjegyzés: a fenti módszer nemcsak a feladat partikularitása miatt volt alkalmazható, hiszen tetszőleges $a_{n+1} = a \cdot a_n + b \cdot b_n$ és $b_{n+1} = c \cdot a_n + d \cdot b_n$ mellett is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a-1)a_n + b\cdot b_n}{c\cdot a_n + (d-1)b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a-1)\dfrac{a_n}{b_n}+b}{c\dfrac{a_n}{b_n}+d-1} = \frac{(a-1)x+b}{cx+d-1} = x =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$, tehát meghatározható az x értéke.

4. megoldás

Egyszerűen megoldjuk az (1) és (2) rekurziós egyenletrendszert a (3) peremfeltételekkel.

A (2) alapján $a_n = b_{n+1} - b_n$ tehát $a_{n+1} = b_{n+2} - b_{n+1}$, így az (1)-ből kapjuk, hogy $b_{n+2} - 2b_{n+1} - b_n = 0$, amelynek a karakterisztikus egyenlete $r^2 - 2r - 1 = 0$. Azonban $b_0 = 0$ és $b_1 = 1$, ezek alapján kapjuk, hogy $b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot r_1^n - \frac{1}{2\sqrt{2}} r_2^n$, vagyis $b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n]$, amit már az 1. megoldásnál is megkaptunk.

Hasonlóan kapjuk, hogy $a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0$, az $a_0 = a_1 = 1$ peremfeltételek mellett, és hasonlóan az előbbihez

$$a_n = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n].$$

Ezek után az 1. megoldás utolsó lépését követve, kapjuk, hogy:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}.$$

5. megoldás

Az alábbi megoldásban a sorozatok és a mátrixok hatványa közti kapcsolatot szeretnénk kihangsúlyozni.

Mivel

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned} \quad \text{ezért} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

mátrixok szorzása is igaz.

Bevezetve az $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ jelöléseket, a (4) összefüggés $X_{n+1} = A \cdot X_n$ alakban is írható, amelynek az ismételt használatával az $X_n = A^n \cdot X_0$ (5) összefüggéshez jutunk.

Ismert tény (lásd pl. A felsőbb algebra elemei, XI. osztályos tankönyv 21. old. 6. feladatát), hogy az $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix kielégíti az $X^2 - (a + d)X + (ad - bc)\, I_2 = O_2$ karakterisztikus egyenletet, amelyről egyszerű behelyettesítéssel is meggyőződhetünk.

A mi esetünkben a karakterisztikus egyenlet $X^2 - 2X - I_2 = O_2$, amelyhez az $x^2 - 2x - 1 = 0$ egyenletet rendelve, az előbbiek alapján $A^n = B \cdot x_1^n + C \cdot x_2^n$ alakban kereshető, ahol $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, B és C pedig 2×2-es mátrixok, amelyeket az

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{\circ} = B + C$ és $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A^1 = x_1 \cdot B + x_2 \cdot C$ egyenletrendszerből határozhatunk meg, végül kapjuk, hogy:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Az $A^n = B \cdot x_1^n + C \cdot x_2^n$ valamint a (3) alapján kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n\right],$$

ahonnan már belátjuk az ismert eredményt.

A továbbiakban egy újabb rekurziós összefüggést állapítunk meg, amelynek segítségével még három megoldást mutatunk be.

Mivel $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ és $b_{n+1} = a_n + b_n$, valamint $a_1 = b_1 = 1$, ezért $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n}$, és bevezetve a $C_n = \frac{a_n}{b_n} > 0$ jelölést, a $C_{n+1} = \frac{C_n + 2}{C_n + 1}$ és $C_1 = 1$ (6) összefüggést kapjuk.

6. megoldás

Indukcióval igazoljuk, hogy $C_n \in [1, 2)$. Valóban $C_1 = 1 \in [1, 2)$, ezért feltételezve, hogy $C_n \in [1, 2)$, mivel $C_{n+1} = 1 + \frac{1}{C_n + 1}$, belátható, hogy $C_n > 1$, valamint $\frac{1}{1 + C_n} < 1$ is igaz, innen $C_{n+1} \in [1, 2)$.

Észrevehető, hogy $C_{n+1} = \frac{C_n + 2}{C_n + 1}$, $C_{n+1} = f(C_n)$ típusú rekurzió, ahol $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$ folytonos függvény, sőt mi több $f'(x) = -\frac{1}{(1 + x)^2} < 0$ miatt f szigorúan csökkenő.

Éppen ezért $f \circ f$ szigorúan növekvő lesz, tehát a $C_2 = \frac{3}{2} > \frac{17}{12} = C_4$ és $C_{2n} = f(f(C_{2n-2}))$ és $C_{2n+2} = f(f(C_{2n}))$ végett indukcióval ellenőrizhető, hogy $C_{2n} > C_{2n+2}$ és hasonlóan $C_1 = 1 < \frac{7}{5} = C_3$ miatt $C_{2n-1} < C_{2n+1}$ is azonnal adódik. A monotonitás és korlátosság végett létezik $a = \lim C_{2n}$,

$b = \lim C_{2n-1}$ és $a = \dfrac{b+2}{b+1}$, $b = \dfrac{a+2}{a+1}$ összefüggésekből azonnal adódik, hogy $a = b = \sqrt{2}$, azaz

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

7. megoldás

Vizsgáljuk meg a $|C_{n+1} - \sqrt{2}|$ különbséget.

$$|C_{n+1} - \sqrt{2}| = \left|\frac{C_n + 2}{C_n + 1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{(2-\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1)C_n}{C_n + 1}\right| =$$

$$= \left|\frac{2(1-\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2})C_n}{2(C_n+1)}\right| = \frac{(2-\sqrt{2})|C_n - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}(C_n+1)} <$$

$< (2-\sqrt{2})|C_n - \sqrt{2}|$ (hiszen $C_n \geqslant 1$), azaz $|C_{n+1} - \sqrt{2}| < (2-\sqrt{2})|C_n - \sqrt{2}|$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

A fenti egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával a

$$|C_n - \sqrt{2}| < (2-\sqrt{2})^{n-1}|C_1 - \sqrt{2}| = (\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})^{n-1}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, amely az ε-os konvergenciatétel értelmében $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \sqrt{2}$ értéket jelenti.

8. megoldás

A továbbiakban a kontrakció elvét és a Barach fixpont-tételét alkalmazzuk.

Mivel $C_{n+1} = f(C_n)$, $C_1 = 1$; ahol $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ és $|f'(x)| = \dfrac{1}{(1+x)^2} <$ $< \dfrac{1}{4} < 1$, hiszen $x > 1$, ezért f kontrakció, azaz $|f(x) - f(y)| < \dfrac{1}{4}|x-y|$, $(\forall)\ x, y > 1$, tehát létezik egyetlen C, amelyre $C = f(C)$, azaz $C = \dfrac{C+2}{C+1}$ és $C = \lim C_n$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \sqrt{2}$.

A jegyzet célja nem a megoldások sokaságának a bemutatása, hanem a matematika különböző ágai közti kapcsolat megteremtése által nyert megoldási módszerek változatosságának az érzékeltetése, s ezáltal a matematika egyes ágai iránti érdeklődés felkeltése volt.