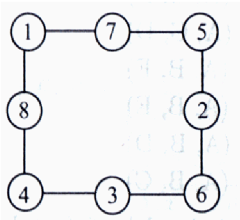
Egy szórakoztató matematika feladat kapcsán (II.)

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

A **MatLap 4/2005** számában, az I.-IV. osztályos tanulók részére a 2. számmal a következő logikai feladványt tűzték ki:



„A mellékelt ábrán látható négyzet minden oldalán a számok összege 13. Csoportosítsuk át úgy a számokat, hogy az összeg mind a négy oldalon 12 legyen.” Mielőtt a feladvánnyal kapcsolatos általánosításra térnénk, megemlítjük, hogy egy részben hasonló feladványról a **MatLap 10/2000** számában a 397.-398. oldalon az *„Egy szórakoztató matematika feladat kapcsán*” című cikkben írtunk

A kíváncsiskodó Olvasóban könnyen felmerülhetnek a következő kérdések:

Ha az 1-től 8-ig terjedő természetes számokat a szóbanforgó négyzet oldalain helyezzük el úgy, hogy mind a négy oldalon a 3-3 szám összege ***ugyanannyi*** *legyen. Ekkor:*

1) *Milyen korlátok között változhat ez az „ugyanannyi” közös összeg?*
2) *A kedvező esetekben meg is valósítható a számoknak a kért beírása?*

Az említett kérdések megválaszolása nem igényel különösebb matematikai ismereteket, csupán egy kis kreativitásra van szükség.
A mellékelt ábra jelöléseit használva, a 8 kisnégyzetbe írt számokat jelöljük rendre az **a, b, c, d, e, f, g, h** betűkkel. A négy oldalon előálló ugyanazon közös összeget jelöljük ***n***-el. A kért feltételek mellett, a következő egyenletek írhatók fel:

g	f	e
h		d
a	b	c

(1) a + b + c = n ; (2) c + d + e = n ; (3) e + f + g = n ; (4) g + h + a = n

Az **(1)-(4)** egyenletek megfelelő oldalainak az összegezéséből, a

$$\mathbf{2\cdot(a + c + e + g) + (b + d + f + h) = 4\cdot n\ (*)}$$

összefüggés adódik, ahol $\mathbf{a, b, c, d, e, f, g, h \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}$ számok páronként különbözőek**,** és $\mathbf{S = a + b + c + d + e + f + g + h = 1 + 2 + \ldots + 7 + 8 = 36}$.
Ezért a (*) összefüggés így írható fel: $\mathbf{a + c + e + g = 4\cdot n - 36 = 4\cdot (n - 9)}$ **(****).** A feltételek alapján azonban $\mathbf{10 = 1 + 2 + 3 + 4 \le a + c + e + g \le 5 + 6 + 7 + 8 = 26}$ így a (**) alapján adódik, hogy $\mathbf{2{,}5 \le n\text{-}9 \le 6{,}5}$ ugyanakkor $\mathbf{n \in N}$, ezért $\mathbf{3 \le n\text{-}9 \le 6}$ ahonnan $\mathbf{n \in \{12, 13, 14, 15\}}$ adódik, és ezzel az első kérésre meg is adhatjuk a választ: a négyzet oldalain szereplő „ugyanannyi” összeg csak a **12, 13, 14** vagy **15** számok valamelyike lehet.
Nem marad más hátra mint, hogy mindegyik esetre keressünk egy-egy példát. A keresést megkönnyebbíti az az információ, hogy az **(1)-(4)** és (**) összefüggések alapján, a 4 sarokban levő számok összege rendre **12, 16, 20** illetve **24** kell legyen. A 4 esetre 1-1 elrendezést az alábbiakban láthatunk:

1	**5**	**6**
8		**4**
3	**7**	**2**

n = 12

1	**7**	**5**
8		**2**
4	**3**	**6**

n = 13

1	**6**	**7**
5		**3**
8	**2**	**4**

n = 14

3	**5**	**7**
4		**2**
8	**1**	**6**

n = 15

Annak az eldöntését, hogy az egyes esetekben még hány más, az előzőektől *különböző* megoldás létezik, az érdeklődő Olvasóra bízzuk.