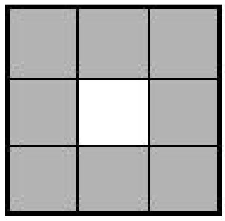
Egy szórakoztató matematika feladat kapcsán

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Az **ML 8/2000** számában, a **Szórakoztató Matematika** rovatban a **Kincsőrzés** című feladványról olvashatunk. A szóban forgó feladványnak több más változata is van, egyik az Aranyhímző lányok néven vált ismertté. Az említett feladatoknak a lényege ugyan az: a mellékelt ábrán látható 8 szobában, különböző számú személyeket kell elhelyezni úgy, hogy mind a négy oldal mentén, a 3-3 szobában levő személyek száma ugyanannyi, pontosan 9 legyen.



A kíváncsiskodó Olvasóban könnyen felmerülhetnek a következő kérdések:

1) *Legalább hányan kell legyenek a 8 szobában összesen, hogy a kért elhelyezés lehetséges legyen?*
2) *Legfennebb hányan lehetnek a 8 szobában összesen, hogy a kért elrendezés lehetséges legyen?*
3) *Az előbbi két feltétel teljesülése mellett, hányan lehetnek a 8 szobában összesen?*

Az említett kérdések megválaszolása nem igényel különösebb matematikai ismereteket, csupán egy kis kreativitásra van szükség.
A mellékelt ábra jelöléseit használva, a 8 szobában tartózkodó személyek száma legyen a, b, c, d, e, f, g, h. A négyzet szimmetria tulajdonságai miatt, teljesen mellékes a betűk elhelyezésének a sorrendje.

g	f	e
h		d
a	b	c

A kért feltételek mellett, a következő egyenletek írhatók fel:

(1) $a+b+c=9$; (2) $c+d+e=9$; (3) $e+f+g=9$; (4) $g+h+a=9$

Összegezve az (1)-(4) egyenletek megfelelő oldalait, a **$2(a+c+e+g)+(b+d+f+h)=36$ (*)** adódik, ahol **$a, b, c, d, e, f, g, h \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.** Ilyen feltételek mellett keressük meg az **$S=a+b++c+d+e+f+g+h$** összeg lehető legnagyobb, illetve legkisebb értékét. Észrevehető, hogy a (*) összefüggés így is átírható: **$2(a+b+c+d+e+f+g+h)-(a+c+e+g)=36$ (**)** Ezért, ha feltételeznénk, hogy **$S<18$** is lehetséges lenne, akkor **$2S<36$** is igaz, ezért **$2S-(a+c+e+g)<36$** még inkább igaz, vagyis a (**) alapján a **$36<36$** *ellentmondáshoz* jutottunk. Tehát, a nyolc szobában összesen *legalább 18-an* kell legyenek. Ezzel az 1)-es kérdésre választ is adtunk. Most feltételezzük, hogy **$S>36$** lehetséges lenne. Ezúttal vegyük észre, hogy a (*) összefüggés így is átírható: **$(a+b+c+d+e+f+g+h)+(a+c+e+g)=36$ (***)** vagyis **$S+(a+c+e+g)=36$**, ami az **$S>36$** feltétel mellett, az **$a+c+e+g<0$** egyenlőtleséget eredményezni, ez pedig lehetetlen. Tehát a 8 szobában összesen *legfennebb 36* személy tartózkodhat. Ezzel a 2)-es kérdésre is válaszoltunk.

A továbbiakban, a négyzet szimmetria tulajdonságainak a figyelembe vételével, konstruktív módszerrel, egy-egy konkrét példával igazoljuk, hogy minden, 18-tól 36 személyig terjedő személy konkrétan elhelyezhető a kért módon. Ezzel a 3)-as kérdésre adunk választ.

A következő lehetséges elrendezések, csupán 1-1 példát mutatnak mind a 19 esetre. Az érdeklődő Olvasónak javasoljuk, hogy mindegyik esetben próbálja meg megkeresni az összes (nem egyenértékű) szóban forgó elhelyezéseket.

2		7
7		2

18

1		8
		1
8	1	

19

2	1	6
1		1
6	1	2

20

1	2	6
2		1
6	1	2

21

3	2	4
2		2
4	2	3

22

2	3	4
3		2
4	2	3

23

4	3	2
3		3
2	3	4

24

2	7	0
0		7
7	0	2

25

1	4	4
4		4
4	4	1

26

	9	
1		8
8		1

27

2	5	2
5		5
2	5	2

28

2	5	1
5		7
1	7	1

29

3	6	
6		6
	6	3

30

0	7	2
7		6
2	6	1

31

2	7	
7		7
	7	2

32

0	8	1
8		7
1	7	1

33

1	8	
8		8
	8	1

34

1	8	
8		9
	9	

35

	9	
9		9
	9	

36

Az (1)-(4) összefüggés alapján könnyen belátható, hogy 36 személy estén, csak az ábrán látható egyetlen megoldás lehetséges.