ELSŐRENDŰ REKURZIÓS ÖSSZEFÜGGÉSSEL ÉRTELMEZETT SOROZATOK TANULMÁNYOZÁSA ZSEBSZÁMOLÓGÉPPEL

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Gondolná-e valaki, hogy napjainkban a zsebszámológép (vagy a mobiltelefonok számológépe) a közönséges számolásokon kívül még másra is használható lenne? Ezt fogjuk igazolni, megmutatva, hogy akár sorozatok konvergenciájának tanulmányozására, vagy éppen sorozat határértékének a megsejtésére is jól használható, sőt ebben egyedi szerepet is kap, hiszen sejtéseket alakíttat ki, és nagyon jól szemléltet!

Az alábbiakban bemutatásra kerülő témát sikeresen kipróbáltam a matematika óráimon, és bárkinek csak javasolni tudom, hogy próbálja ki ő is, mert megéri!

Kísérleteim célja az volt, hogy a tanulókkal tanulmányozzuk egyes rekurziós képlettel értelmezett sorozatok konvergenciáját. Előzőleg a tanulók már elsajátították a főbb szükséges fogalmakat és ismereteket, továbbá a sorozatok monotonitása és korlátossága kapcsán tanultakat, valamint elkezdtünk sorozat határértékeket számolni, de ezen a téren még gyerekcipőben jártunk.

Véleményem szerint a 11. osztályos matematikai analízis, és különösképpen a sorozatok konvergenciája, a határértékük kiszámolása azért érthető meg és sajátítható el nagyon nehezen, mert hiányzik a kellően áttekinthető konkrét modell. Pontosabban, a végtelennel kapcsolatos jelenségeket nem igazán lehet modellezni. Nincs erre semmi intuitív alap, sem támasz. Csupán értelmezések, fogalmak, előírt szabályok, tételek. Ezért tűnődtem azon, hogyan is lehetne a témakört úgymond „cselekedtetve" megismertetni? Ekkor eszembe jutott, hogy a kézi számológéppel eléggé gyorsan olyan fogalmakat tudunk kezelni, mint monotonitás, korlátosság, és végső soron a konvergencia fogalma. Ezért úgy döntöttem, hogy kipróbálom mindazt, amit az alábbiakban közreadok. És beismerem, nem bántam meg, mert a visszajelzések szerint, a tanulók sokkal jobban megértették a témakört, mintha csak krétával a fekete táblára írtam volna a leckét. Természetesen az alábbiakban bemutatott bizonyításokat részletesen a táblán bemutatva elemeztük, de csak miután elvégeztük a következő kísérleteket, azután érveltünk és bizonyítottunk.

1. *Kísérlet*: Egy zsebszámológépbe írjuk be a 2-est, és vonjunk belőle gyököt. Az eredményből ismét vonjunk gyököt. Ezt ismételjük meg mindaddig, amíg a kijelzőn ugyanazt a számot nem kapjuk. Mit mondhatunk az így értelmezett sorozat monotonitásáról, korlátosságáról és határértékéről? Hogyan magyarázzuk meg a látottakat?

Megoldás:

A zsebszámológép kijelzőjén, amely 8 karaktert tud megjeleníteni, rendre ezt láthatjuk: 1.4141356; 1.1892071; 1.0905076; 1.0442737; 1.0218971; 1.0108892; 1.0054298; 1.0027112; 1.0013546; 1.0006770; 1.0003384; 1.0001691; 1.0000845; 1.0000422; 1.0000210; 1.0000104; 1.0000051; 1.0000025; 1.0000012; 1.0000005; 1.0000002; 1.0000001; **1.**; **1.**; **1.**; ... Leolvashatók a következő tulajdonságok:

1) Az így keletkezett sorozat szigorúan csökkenő. Ezt bizonyítani is fogjuk! A szóban forgó sorozat tagjai rendre: $a_1=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $a_2=\sqrt{a_1}=\sqrt{\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{2^2}}$, $a_3=\sqrt{a_2}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=2^{\frac{1}{2^3}}$, és általában $a_{n+1}=\sqrt{a_n}=\overbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}^{(n+1)\text{-gyök}}=2^{\frac{1}{2^{n+1}}}$, minden $n\geq 1$ esetén. Könnyen látható, hogy $a_1>\sqrt{a_1}=a_2$, ezért ha matematikai indukció módszerét használjuk, és feltételezzük, hogy $a_{n-1}>a_n$, akkor az $a_{n-1}-a_n=\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}=\dfrac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}$ összefüggés alapján azonnal adódik, hogy $a_{n+1}>a_n$, vagyis a sorozat valóban szigorúan csökkenő. A monotonitást

másképpen is bizonyíthatjuk, például, ha felírjuk, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{\frac{1}{2^{n+1}}}}{2^{\frac{1}{2^n}}} = 2^{-\frac{1}{2^n}} < 2^0 = 1$. Ez rövidebb az előző bizonyításnál, de azt a bizonyítási technika elsajátításáért láttuk fontosnak bemutatni.

2) Mivel a sorozat szigorúan csökkenő, ezért van egy legnagyobb alsó korlátja. A számológép kijelzései alapján az a sejtésünk, hogy a legnagyobb alsó korlát az 1, vagyis $1 < a_n$, bármely $n \geq 1$ esetén. Ezt bizonyíthatjuk is, hiszen $a_n = 2^{\frac{1}{2^n}} > 2^0 = 1$ nyilvánvaló bármely $n \geq 1$ esetén. Tehát $a_n \in (1, \sqrt{2}]$, $n \geq 1$.

3) Mivel az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan csökkenő és korlátos, ezért Weierstrass tétele alapján a sorozat konvergens, vagyis van véges határértéke. A zsebszámológép kijelzőjén ezt úgy érzékeljük, hogy bizonyos számú műveletvégzés után a kijelzőn az 1 látható. Ez tehát azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, ami valóban igaz, mert $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2^n}} = 1$ nyilvánvaló. Egyúttal az az ismert tétel is szemléltetésre került, amely szerint egy monoton csökkenő sorozat legnagyobb alsó korlátja éppen a sorozat határértéke, esetünkben éppen 1.

4) Továbbá magyarázásra szorul az, hogy bizonyos számú műveletvégzés után, a számológép kijelzőjén miért jelenik meg mindig az 1-es. Ennek az okára könnyen rájövünk, ha például egy 8-nál több kijelzős számológépen végezzük a számolásokat, ahol az $1,0000000$ után még 0-tól különböző számjegyek is megjelennek. Tehát, a 8 karaktert kijelző számológépen, valójában 7 tizedes pontossággal közelítettük meg a sorozat határértékét.

2. *Kísérlet*: Ugyanaz a feladat, mint az előző kísérletben, csak a 2-es szám helyett egy más, tetszőleges $a > 0$ számot veszünk.

Megoldás:

Konkrét esetekben elvégezve a számolásokat, a kijelzett számértékeket figyelve annyit vehetünk észre, hogy bizonyos lépésszám után megint az 1-es jelenik meg, és az 1-et hamarabb, illetve később érjük el, vagyis a „konvergencia gyorsasága” is változik. Minden más eredmény és bizonyítás megegyezik az előbbiekben bemutatottakkal. Összegezve, végül is bizonyítottuk, hogy minden $a > 0$ szám esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{a}}}}}^{n\text{-gyök}} = 1$, vagyis $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{a}}}} \approx 1$, ahol a gyökjelek száma nagy.

3. *Kísérlet*: A zsebszámológépbe írjuk be a 2-est, és vonjunk belőle gyököt. Az eredményt szorozzuk meg 2-vel, és ismét vonjunk gyököt. Ezt ismételjük meg mindaddig, amíg a kijelzőn ugyanazt a számot nem kapjuk. Mit mondhatunk az így értelmezett sorozat monotonitásáról, korlátosságáról és határértékéről? Hogyan magyarázzuk meg a látottakat?

Megoldás:

A zsebszámológép kijelzőjén, amely 8 karaktert tud megjeleníteni, rendre ezt láthatjuk: 1.4141356; 1.6817928; 1.8340080; 1,9152065; 1.9571441; 1.9784560; 1.9891988; 1.9945921; 1.9972942; 1.9986466; 1.9993232; 1.9996615; 1.9998307; 1.9999153; 1.9999576; 1.9999758; 1.9999884; 1.9999947; 1.9999973; 1.9999986; 1.9999993; 1.9999996; 1.9999998; 1.9999999; **2**; **2**; **2**; .... Leolvashatók a következő tulajdonságok:

1) Az így keletkezett sorozat szigorúan növekvő. Ezt bizonyítani is fogjuk! A szóban forgó sorozat tagjai rendre: $a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $a_2 = \sqrt{2a_1} = \sqrt{2\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$, $a_3 = \sqrt{2a_2} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$, és általában $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} = \overbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2}}}}}^{(n+1)\text{-gyök}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}} = 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$ minden $n \geq 1$ esetén. Könnyen látható, hogy a $\sqrt{2} = a_1 < \sqrt{2a_1} = \sqrt{2\sqrt{2}} = a_2$, és az $a_{n+1} - a_n = \sqrt{2a_n} - \sqrt{2a_{n-1}} = \frac{2(a_n - a_{n-1})}{\sqrt{2a_n} + \sqrt{2a_{n-1}}}$ összefüggések alapján matematikai indukcióval

bizonyíthatjuk, hogy a sorozat valóban szigorúan növekvő.

2) Mivel a sorozat szigorúan növekvő, ezért van egy legkisebb felső korlátja. A számológép kijelzései alapján az a sejtésünk, hogy a legkisebb felső korlát 2, vagyis $a_n < 2$, bármely $n \geq 1$ esetén. Ezt könnyen bizonyíthatjuk matematikai indukcióval, ugyanis $a_1 = \sqrt{2} < 2$, és ha feltételezzük, hogy $a_n < 2$, akkor $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$. Tehát $a_n \in [\sqrt{2}, 2)$ bármely $n \geq 1$ esetén.

3) Mivel az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő és korlátos, ezért Weierstrass tétele alapján a sorozat konvergens, vagyis van véges határértéke. A zsebszámológép kijelzőjén ezt úgy érzékeljük, hogy bizonyos számú műveletvégzés után a kijelzőn a 2 látható. Ez tehát azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, ami valóban igaz, mert $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2$ nyilvánvaló. Egyúttal az az ismert tétel is szemléltetésre került, amely szerint monoton növekvő sorozat legkisebb felső korlátja éppen a sorozat határértéke, esetünkben 2.

4. *Kísérlet*: Ugyanaz a feladat, mint az előző kísérletben, csak a 2-es szám helyett más, tetszőleges $a > 0$ számot veszünk.

Megoldás:

Konkrét esetekben elvégezve a számolásokat, a kijelzett számértékeket figyelve annyit vehetünk észre, hogy bizonyos lépésszám után éppen az a szám jelenik meg a kijelzőn. Minden más eredmény és bizonyítás megegyezik az előbbiekben bemutatottakkal, csak a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ változik az $a_1 = \sqrt{a}$ szerint. Összegezve, végül is bizonyítottuk, hogy minden $a > 0$ szám esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}}}^{n\text{-gyök}} = a$, vagyis $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}} \approx a$, ahol a gyökjelek száma nagy.

5. *Kísérlet*: A zsebszámológépbe írjuk be a 2-est, és vonjunk belőle gyököt. Az eredményhez adjunk hozzá 2-öt, és ismét vonjunk gyököt. Ezt ismételjük meg mindaddig, amíg a kijelzőn ugyanazt a számot nem kapjuk. Mit mondhatunk az így értelmezett sorozat monotonitásáról, korlátosságáról és határértékéről? Hogyan magyarázzuk meg a látottakat?

Megoldás:

A zsebszámológép kijelzőjén, amely 8 karaktert tud megjeleníteni, rendre ezt láthatjuk: 1.414135; 1.8477590; 1.9615705; 1.9903694; 1.9975909; 1.9993976; 1.9998494; 1.9999623; 1.9999905; 1.9999976; 1.9999994; 1.9999998; 1.9999999; **2**; **2**; **2**; ....

1) Az így keletkezett sorozat szigorúan növekvő. Ezt bizonyítani is fogjuk! A szóban forgó sorozat tagjai rendre: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2 + a_2} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, és általában $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} = \overbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}}^{(n+1)\text{-gyök}}$ minden $n \geq 1$ esetén.

Látható, hogy ezúttal csak rekurziós összefüggést kaptunk, nem lehet képletesen felírni az általános tagot, mint az előbbi esetekben. Könnyen látható, hogy az $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$, és az $a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}} = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}}$ összefüggések alapján matematikai indukcióval bizonyíthatjuk, hogy a sorozat valóban szigorúan növekvő.

2) Mivel a sorozat szigorúan növekvő ezért van egy legkisebb felső korlátja. A számológép kijelzései alapján az a sejtésünk, hogy a legkisebb felső korlát 2, vagyis $a_n < 2$, bármely $n \geq 1$ esetén. Ezt könnyen bizonyíthatjuk matematikai indukcióval, ugyanis $a_1 = \sqrt{2} < 2$, és ha feltételezzük, hogy $a_n < 2$, akkor $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$. Tehát $a_n \in [\sqrt{2}, 2)$, bármely $n \geq 1$ esetén.

3) Mivel az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő és korlátos, ezért Weierstrass tétele alapján a sorozat konvergens, vagyis van véges határértéke. A zsebszámológép kijelzőjén ezt úgy érzékeljük, hogy bizonyos számú műveletvégzés után a kijelzőn 2

látható. Ez tehát azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, ami valóban igaz, mert ha $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = x$ is igaz, így határértékre térve az $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ rekurzióban, az $x = \sqrt{2+x}$, $x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet adódik, ahonnan csak az $x = 2$ felel meg, mert $x = -1 \notin [\sqrt{2}, 2)$. Tehát valóban $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}^{n\text{-gyök}} \quad \text{vagy másképpen} \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} = 2,$$

ahol a gyökjelek száma nagy.

6. *Kísérlet*: Az előző feladatban a 2-es szám helyett 6-ot veszünk. Mit mondhatunk az így kapott sorozat monotonitásáról, korlátosságáról és határértékéről? Hogyan magyarázzuk meg a látottakat?

Megoldás:

Az így kapott sorozat $a_1 = \sqrt{6}$, $a_2 = \sqrt{6+a_1} = \sqrt{6+\sqrt{6}}$, $a_3 = \sqrt{6+a_2} = \\ = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$, és általában $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} = \overbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}}^{(n+1)\text{-gyök}}$ minden $n \geq 0$ esetén. Az előbbiekhez hasonlóan igazoljuk, hogy a sorozat szigorúan növekvő. Ezért a legnagyobb alsó korlát az első tag, vagyis $a_n > a_1 = \sqrt{6}$ bármely $n \geq 1$ esetén. A legkisebb felső korlátot ezúttal is leolvashatjuk a kijelzőről, és ez éppen 3. Ezt könnyen bizonyíthatjuk matematikai indukcióval, ugyanis $a_1 = \sqrt{6} < 3$, és ha feltételezzük, hogy $a_n < 3$, akkor $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} < \sqrt{6+3} = 3$. Tehát $a_n \in [\sqrt{6}, 3)$, bármely $n \geq 1$ esetén. Mivel az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő és korlátos, ezért Weierstrass tétele alapján a sorozat konvergens, vagyis van véges határértéke. A zsebszámológép kijelzőjén ezt úgy érzékeljük, hogy bizonyos számú műveletvégzés után a kijelzőn 3 látható. Ez tehát azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$, amit az előzőek mintájára az $x = \sqrt{6+x}$, $x^2 - x - 6 = 0$ pozitív gyöke szolgáltat, és ez éppen $x = 3$.

7. *Kísérlet:* Az előző feladatban 6-os szám helyett 12-t veszünk. Mit mondhatunk az így kapott sorozat monotonitásáról, korlátosságáról és határértékéről? Hogyan magyarázzuk meg a látottakat?

Megoldás:

Az így kapott sorozat $a_1 = \sqrt{12}$, $a_2 = \sqrt{12+a_1} = \sqrt{12+\sqrt{12}}$, $a_3 = \sqrt{12+a_2} = \\ = \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}$, és általában

$$a_{n+1} = \sqrt{12+a_n} = \overbrace{\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots+\sqrt{12}}}}}}^{(n+1)\text{-gyök}}$$

minden $n \geq 0$ esetén. Az előbbiekhez hasonlóan igazoljuk, hogy a sorozat szigorúan növekvő. Ezért a legnagyobb alsó korlát az első tag, vagyis $a_n \geq a_1 = \sqrt{12}$, bármely $n \geq 1$ esetén. A legkisebb felső korlátot ezúttal is leolvashatjuk a kijelzőről, és ez éppen 4. Ezt könnyen bizonyíthatjuk matematikai indukcióval, ugyanis $a_1 = \sqrt{12} < 4$, és ha feltételezzük, hogy $a_n < 4$, akkor $a_{n+1} = \sqrt{12+a_n} < \sqrt{12+4} = 4$. Tehát $a_n \in [\sqrt{12}, 4)$, bármely $n \geq 1$ esetén. Mivel az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő és korlátos, ezért Weierstrass tétele alapján a sorozat konvergens, vagyis van véges határértéke. A zsebszámológép kijelzőjén ezt úgy érzékeljük, hogy bizonyos számú műveletvégzés után a kijelzőn 4 látható. Ez tehát azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$, amit az előzőek mintájára az $x = \sqrt{12+x}$, $x^2 - x - 12 = 0$ pozitív gyöke szolgáltat, és ez éppen $a = 4$.

1. *Megjegyzés*:

Bizonyára felmerül az Olvasóban a kérdés, hogy a 2, 6, 12 számok helyett milyen más számot válasszunk úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k$ természetes szám legyen? Nos, erre a válasz nem is olyan nehéz, hiszen az előbbi sorozatok az $a_1 = \sqrt{a}$, $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$, $a > 0$ rekurzióval voltak értelmezve, és ha ebben határértékre térünk, akkor $k = \sqrt{a+k}$, $a = k^2 - k = (k-1)k$. Tehát, az $a_1 = \sqrt{a}$ és $a \in \{1\cdot 2; 2\cdot 3; 3\cdot 4; \ldots; (k-1)k; \ldots\}_{k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}}$ választással a szóban forgó sorozat határértéke rendre 2, 3, 4, …, k, … lesz. Természetesen az előzőekhez hasonló kísérletek ezen esetekben is elvégezhetők.

8. *Kísérlet:* A zsebszámológépbe írjuk be a 1-est, és vonjunk belőle gyököt. Az eredményhez adjunk hozzá 1-et, és ismét vonjunk gyököt. Ezt ismételjük meg mindaddig, amíg a kijelzőn ugyanazt a számot nem kapjuk. Mit mondhatunk az így értelmezett sorozat monotonitásáról, korlátosságáról és határértékéről? Hogyan magyarázzuk meg a látottakat?

Megoldás:

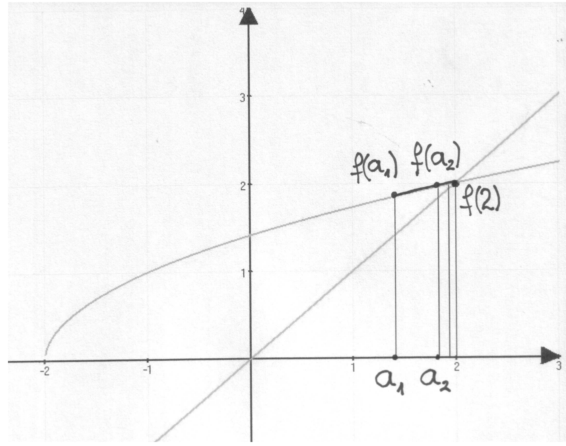
A zsebszámológép kijelzőjén, amely 8 karaktert tud megjeleníteni, rendre ezt láthatjuk: 1; 1.414135; 1.5537739, 1.5980531; 1.6118477; 1.6161212; 1.6174427; 1.6178512; 1.6179775; 1.6180165; 1.61802859; 1.6180323; 1.6180334; 1.6180338; **1.6180339**; **1.6180339**; **1.6180339**; …. Ezúttal az „állandó” számnak nem egy egész számot kaptunk, hanem a 1.6180339 számot, ami természetesen csak egy 7 tizedes pontosságú megközelítés. A sorozatunk ezúttal $a_1 = \sqrt{1}$, $a_2 = \sqrt{1+a_1} = \sqrt{1+\sqrt{1}}$, $a_3 = \sqrt{1+a_2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$ és általában $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} = \overbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}}}^{(n+1)\text{-gyök}}$ minden $n \geq 1$ esetén. A kiszámolt értékek alapján szigorúan növekvő, amit indukcióval az előbbiek mintájára az $a_{n+1} - a_n = \sqrt{1+a_n} - \sqrt{1+a_{n-1}} = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}}}$ összefüggés alapján bizonyíthatunk. Mivel a sorozat szigorúan növekvő, ezért a legnagyobb alsó korlát az első tag, vagyis $a_n > a_1 = 1$, bármely $n \geq 1$ esetén. A felső korlátot illetően az a sejtésünk, hogy a felső korlát egy megközelítő értéke 1.6180339…. Ha ez bebizonyosodna, akkor a sorozat monoton és korlátos lenne, így létezne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, ami az $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ rekurzió alapján az $x = \sqrt{1+x}$, $x^2 - x - 1 = 0$ pozitív gyöke, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339\ldots$, amit éppen a számológéppel is kaptunk. Tehát, a sorozat legkisebb felső korlátja az $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339\ldots$ szám (az „aranymetszés száma” nevet is viseli), és ezt teljes indukcióval igazolhatjuk, hiszen ha feltételezzük, hogy $a_n < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, akkor az $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ is teljesül.

2. *Megjegyzés*:

Az előbbi sorozatokat az $a_1 = \sqrt{a}$, $a_{n+1} = \sqrt{a+a_n}$, $a > 0$ rekurzióval értelmeztük. Könnyen igazolható, hogy ez a sorozat szigorúan növekvő, és korlátos, pontosabban $a_n \in \left[\sqrt{a}, \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}\right)$. Ezért konvergens, és ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, akkor ez teljesíti az $x = \sqrt{a+x}$, $x^2 - x - a = 0$ egyenletet, amelynek pozitív gyöke csak az $x = \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$. Az 1. Megjegyzés alapján, ez a határérték akkor és csakis akkor lesz természetes szám az $a \in \mathbb{N}^*$ valamely értékére, ha $a = (k-1)k$ és $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, minden más esetben irracionális szám.

3. *Megjegyzés*:

Az előbbi típusú sorozatok tagjainak érdekes mértani szemléltetésük és jelentésük van. A könnyebb ábrázolás céljából elemezzük az $a = 2$ esetet (lásd az 5. Kísérletet). Ugyanabban a koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $f\colon [-2, \infty) \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{2+x}$ és a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ függvényeket. Próbáljuk ábrázolni az $a_0 = 0$ és $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ rekurziós képlettel értelmezett sorozat tagjait, vagyis az a_1, $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, $\ldots$, $a_n = f(a_{n-1})$, $\ldots$ számokat. Észrevehető, hogy ahogyan az $n \in \mathbb{N}^*$ értéke egyre nagyobb értékeket vesz fel, úgy az előbbi sorozat tagjai az $f(x) = \sqrt{2+x}$ függvénygörbén egyre jobban közelednek a $(2, 2)$ koordinátájú ponthoz, vagyis éppen az $\sqrt{2+x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet egyetlen pozitív gyökéhez, az $x = 2$-höz. Az $y = x$ egyenlet megoldásait az f függvény fixpontjának nevezik. Esetünkben $x = 2$ (ami éppen a sorozat határértéke is) az $f(x) = \sqrt{2+x}$ képlettel értelmezett függvény fixpontja, ami az ábrán az $f(x) = \sqrt{2+x}$ és a $g(x) = x$ függvények metszéspontjának abszcisszája.



9. *Kísérlet*: A zsebszámológépbe írjuk be az 1-es inverzét, majd adjunk hozzá 1-et. Ennek az eredménynek az inverzéhez megint adjunk 1-et, és a kijött eredmény inverzéhez újból adjunk 1-et. Ezt ismételjük meg mindaddig, amíg a kijelzőn ugyanazt a számot nem kapjuk. Mit mondhatunk az így értelmezett sorozat monotonitásáról, korlátosságáról és határértékéről? Hogyan magyarázzuk meg a látottakat?

Megoldás:

A zsebszámológép kijelzőjén, amely 8 karaktert tud megjeleníteni, rendre ezt láthatjuk: 2; 1.5000000; 1.6666666; 1.6000000; 1.6250000; 1.6153846; 1.6190476; 1.6176470; 1.6181818; 1.6179775; 1.6180555; 1.6180257; 1.6180371; 1.6180328; 1.6180344; 1.6180338; 1.6180340; **1.6180339**; **1.6180339**; **1.6180339**; $\ldots$

A sorozatot így értelmeztük: $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{a_1} + 1$, $a_3 = \dfrac{1}{a_2} + 1$, és általában $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} + 1$, minden $n \geq 1$ esetén. Ha a kijelző számait követjük azt látjuk, hogy a sorozat se nem növekvő, se nem csökkenő, ellenben $a_1 < a_3 < a_5 < \ldots < a_{2k-1} < \ldots$ és $a_2 > a_4 > a_6 > \ldots > a_{2k} > \ldots$, vagyis a sorozatnak a páratlan indexű részsorozata szigorúan növekvő, és a páros indexű részsorozata pedig szigorúan csökkenő. Ezt a sejtést be is bizonyíthatjuk, hiszen a rekurzió alapján $a_{n+2} - a_n = \dfrac{1}{a_n} + 1 - \dfrac{1}{a_{n-1}} + 1 = \dfrac{1}{a_{n+1}a_{n-1}a_n a_{n-2}}(a_n - a_{n-2})$ és alkalmazzuk a matematikai indukció módszerét. A korlátosságot illetően bizonyíthatjuk, hogy $1 < a_{2k-1} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < a_{2k} < 2$. Ezért a sorozat korlátos is, így Weierstrass tétele értelmében konvergens, vagyis van véges határértéke. Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, így az $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} + 1$ rekurzió alapján $x = \dfrac{1}{x} + 1$, $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet adódik, amelynek pozitív gyöke az $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339$ úgynevezett „aranymetszés szám”. Mint látható, a számológép kijelzőjén is ez a 7 tizedes pontosságú szám jelent meg mint határérték.

4. *Megjegyzés*:

Amennyiben az előbbi kísérletnél az $a_1 = 1$ helyett egy tetszőleges $a_1 = a > 0$ számot vennénk, akkor az előző sorozat az $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} + a$ rekurzióval lesz értelmezve, és az előbb bizonyítottak mintájára itt is ugyanazon eredmények bizonyíthatók csak az $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ helyett az $\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ tört lesz.

5. *Megjegyzés*:

Ismert, hogy a Fibonacci sorozatot így értelmezzük: $f_1 = f_2 = 1$ és $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ minden $n \geq 1$ esetén. Képezzük a Fibonacci sorozat két egymásutáni tagjának az arányát, vagyis legyen $\dfrac{f_{k+1}}{f_k} = a_k$, minden $k \geq 1$ esetén. Ekkor $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ alapján $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} + 1$, vagyis visszakaptuk éppen az előző kísérletbeli sorozatot. Az ott bizonyítottak alapján tehát a Fibonacci sorozat két egymásutáni tagjának az arányából képezett sorozata konvergens, és a határértéke $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Befejezésül megjegyezzük, hogy számos más rekurziós összefüggéssel értelmezett sorozat konvergenciája tanulmányozható a számológéppel. Az érdeklődő olvasónak javasoljuk, hogy a bemutatottak mintájára tanulmányozza a következő rekurziós összefüggésekkel értelmezett sorozatok konvergenciáját:

1) $a_1 = \dfrac{3}{4}$ és $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 1}$ minden $n \geq 1$ esetén.

2) $a_1 = a > 0$, $k > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + k$ minden $n \geq 1$ esetén.

3) $a_1 > 0$, $k > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{k}{a_n}$ minden $n \geq 1$ esetén.

SZARIRODALOM:

[1]. *Tuzson Zoltán*: Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat, Harmadik, bővített kiadás, Ábel kiadó 2011, Kolozsvár (225.-228. old)