A faktorizációs módszer és alkalmazásai

A következő anyagot elsősorban a matematika érettségi vizsgára készülő tanulóknak, és az őket felkészítő tanáraiknak ajánljuk feldolgozásra és önálló munkára! Ellenben az első felét sikerrel használhatják tanórákon vagy versenyekre való felkészülésekre akár már a gimnáziumi osztályokban is bizonyos típusú diofantikus egyenletek megoldása céljából.

A nemzetközi (főleg Angol) szakirodalomban igen elterjed a következő módszer (trükk), aminek a neve „Simon's favorite factoring trick" röviden SFFT. A módszer elnevezésének magyarázatát sehol sem lehet megtalálni, a leírását is csupán csak példákon keresztül szemléltetik, továbbá magyar nyelvű megfelelője sincs, ezért nevezem csupán úgy, hogy „faktorizációs módszer". Ellenben a trükk amilyen egyszerű, annyira hatékony.

Ez a módszer nagyon egyszerű, de annál hasznosabb eszköz a számelméletben az $axy+bx+cy+d=0$ diofantikus egyenlet egész megoldásainak a megkeresésénél.

Nézzük hát át a módszer (trükk) lényegét, amelynek ilyen általános bemutatásával sehol sem találkoztam. Tekintsük a következő nehézségi és általánossági fokozatokat:

1) Először is az $xy+ax+ay+b=0$ diofantikus egyenlet egész megoldásait akarjuk megtalálni, ha $a,b\in\mathbb{Z}$. Az $xy+ax+ay$ kifejezés láttán azonnal eszünkbe juthat az $(x+a)(y+a)$ szorzat, így $xy+ax+ay=(x+a)(y+a)-a^2$ vagyis $\boxed{xy+ax+ay+b=0\Leftrightarrow(x+a)(y+a)=a^2-b}$. Innen már könnyű dolgunk van, hiszen $x+a, y+a$ az a^2-b osztóival egyenlő, vagyis $x+a, y+a\in D_{a^2-b}$ és nincs más dolgunk mint, hogy minden lehetséges esetet letárgyaljunk.

2) Amennyiben az $xy+ax+by+c=0$ diofantikus egyenlet egész megoldásait akarjuk megkeresni, arra gondolva, hogy $xy+ax+by=(x+a)(y+b)-ab$ ezért felírható, hogy $\boxed{xy+ax+by+c=0\Leftrightarrow(x+a)(y+b)=ab-c}$ és így a megoldás az $x+a, y+b\in D_{ab-c}$ elemi egyenletek megoldásából adódik.

3) Végül az $axy+bx+cy+d=0$ diofantikus egyenlet egész megoldásait akarjuk megtalálni.

Az előző eljárásra gondolunk, de elején racionális együtthatókkal. Mivel $axy+bx+cy+d=a\left(xy+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}\right)$, ezért $xy+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}y+\frac{d}{a}=\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(y+\frac{c}{a}\right)+\frac{d}{a}-\frac{bc}{a^2}$.

Tehát $axy+bx+cy+d=0\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(y+\frac{c}{a}\right)+d-\frac{bc}{a}=0$ amit végül is így írhatunk, hogy $\boxed{axy+bx+cy+d=0\Leftrightarrow(ax+b)(ay+c)=bc-ad}$ és innen már csak az $ax+b, ay+c\in D_{bc-ad}$ adta elemi egyenleteket kell megoldanunk.

A módszer alkalmazását az alábbi javasolt feladatokon keresztül szemléltetjük, útmutatást adva a megoldásukhoz.

I. Az egész számok halmazán oldjuk meg a következő egyenleteket:

1) $xy + x + y = 30 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 21$ 2) $xy - x - y = 51 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 50$

3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow xy = 2(x+y)$ vagy $(x-2)(y-2) = 4$

4) $xy + 5x + 6y = 30 \Leftrightarrow (x+6)(y+5) = 60$ 5) $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 1 \Leftrightarrow (x-4)(y-5) = 20$

6) $xy + 3x - 8y = 59 \Leftrightarrow (x-8)(y+3) = 35$ 7) $7xy + x + 14y = 13 \Leftrightarrow (x+2)(7y+1) = 15$

8) $2xy + 10y = 3y + 222 \Leftrightarrow (2x-3)(y+5) = 207$ 9) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{21} \Leftrightarrow (2x-21)(2y-21) = 441$

10) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow (7x-12)(7y-12) = 144$ 11) $4xy + 6x + 10y = 1 \Leftrightarrow (2x+5)(2y+3) = 16$

Az érettségi vizsgákon, és a Covid járvány alatt adott érettségi felkészítő tesztekben is számos ilyen feladatot találunk, az alábbi formákban:

II. Adottak a következő műveletek a valós számok halmazán, és meg kell oldani a mellékelt egyenleteket az egész számok halmazán:

1) $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$, $m^2 \circ n = 16 \Leftrightarrow (m^2 - 5)(n-5) = 11$

2) $x \circ y = 5xy - 5x - 5y + 6$, $a \circ b = 21 \Leftrightarrow 5(a-1)(b-1) = 20$

3) $x * y = \frac{x + y + 6}{xy + 1}$, $m * n = 1 \Leftrightarrow (m-1)(n-1) = 6$

4) $x \circ y = 2xy - 2(x+y)$, $m \circ n = 12 \Leftrightarrow (m-1)(n-1) = 7$

5) $x * y = xy - 101x - 101y + 10302$, $x * y = 2021 \Leftrightarrow (x-101)(y-101) = 101$

6) $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, $m * n = 13 \Leftrightarrow (m-2)(n-2) = 11$

7) $x \circ y = 2xy - 6(x+y) + 21$, $m \circ n = 5 \Leftrightarrow 2(m-3)(n-3) = 2$

8) $x \circ y = 2xy + 2x + 2y$, $m \circ n = 10 \Leftrightarrow 2(m+1)(n+1) = 12$

9) $x \circ y = xy - (x+y) + 1$, $a \circ b = 3 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 3$

10) $x * y = xy + x + y - 2$, $m * n = -1 \Leftrightarrow (m+1)(n+1) = 2$

11) $x * y = xy + x + y + 4$, $m * n = 2 \Leftrightarrow (m+1)(n+1) = -1$

12) $x \circ y = 4xy - 4x - 4y + 5$, $a \circ b = 13 \Leftrightarrow 4(a-1)(b-1) = 12$

13) $x * y = 10x + 10y - 18 - 5xy$, $a * b = 7 \Leftrightarrow 5(x-2)(y-2) = 5$

Ugyancsak a Covid járvány alatt, az érettségi vizsgákon, meg a kiadott felkészítő tesztekben meghonosodott egy típusfeladat, amelyek megoldása szintén a faktorizációs módszeren alapul. Éppen ezért bemutatunk egy mintapéldát:

A valós számok halmazán adott az $x*y = xy - 2(x+y) - 2$ asszociatív művelet. Számítsuk ki az $E = 1*\sqrt{2}*\sqrt{3}*...*\sqrt{10}$ kifejezés értékét!

Először is a faktorizációs módszer alapján vegyük észre, hogy $x*y = (x-2)(y-2)+2$ Ebből kifolyólag $x*2 = 2*y = 2$. Vegyük észre, hogy az E kifejezésben jelen van a 2 éspedig a $\sqrt{4}$ formájában. Éppen ezért felírható, hogy $E = \left(1*\sqrt{2}*\sqrt{3}\right)*2*\left(\sqrt{5}*\sqrt{6}*...*\sqrt{10}\right) =$ $x*2*y = (x*2)*y = 2*y = 2$ ahol $x = 1*\sqrt{2}*\sqrt{3}$ és $y = \sqrt{5}*\sqrt{6}*...*\sqrt{10}$.

Az alábbiakban ennek a feladatnak egy egész klónsokasságát sorakoztatjuk fel, amelyeknek a megoldásának az alapötlete a következő:

Az adott $x*y = axy - b(x+y) + c$ műveletet mindig $x*y = m(x-n)(y-n)+n$ alakban fogjuk felírni, és megfigyeljük, hogy az n szám mindig jelen van az E kifejezésben, és alkalmazzuk az $x*n = n*x = n$ tulajdonságot.

III. A következő műveleteket mindig a valós számok halmazán értelmezzük, és a műveletek asszociatívak. Ekkor kiszámítandók az E kifejezések értékei.

1) $x*y = xy - (x+y) + 2 \Leftrightarrow x*y = (x-1)(y-1)+1$, kiszámítandó: $E = 1*2*3*...*2018$

2) $x*y = x + y - xy \Leftrightarrow x*y = -(x-1)(y-1)+1$, $E = \frac{1}{2016}*\frac{2}{2016}*\frac{3}{2016}*...*\frac{2017}{2016}$

3) $x*y = x + y - \frac{xy}{4} \Leftrightarrow x*y = -\frac{1}{4}(x-4)(y-4)+4$, $E = 1*2*3*...*2019$

4) $x*y = 2xy - 2(x+y) + 3 \Leftrightarrow x*y = 2(x-1)(y-1)+1$, $E = 1^n*2^n*3^n*...*2019^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

5) $x*y = 5x + 5y - xy - 20 \Leftrightarrow x*y = -(x-5)(y-5)+5$,

$E = 1*(-2)*3*(-4)*...*(-2018)*2019$

6) $x*y = 3xy - (x+y) + \frac{2}{3} \Leftrightarrow x*y = 3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$, $E = 1*\frac{1}{\sqrt{2}}*\frac{1}{\sqrt{3}}*...*\frac{1}{\sqrt{2021}}$

7) $x*y = xy - 4(x+y) + 20 \Leftrightarrow x*y = (x-4)(y-4)+4$, $E = 1^2*2^2*3^2*...*2021^2$

8) $x*y = 5xy - 5(x+y) + 6 \Leftrightarrow x*y = 5(x-1)(y-1)+1$, $E = \frac{5}{1}*\frac{5}{2}*\frac{5}{3}*...*\frac{5}{9}$

9) $x*y = \sqrt{3}\left(xy+4\right) - 3(x+y) \Leftrightarrow x*y = \sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)$, $E = 3^1*3^{\frac{1}{2}}*3^{\frac{1}{3}}*...*3^{\frac{1}{2021}}$

10) $x*y = x + 5xy + y \Leftrightarrow x*y = 5\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}$,

$$E=\left(-\frac{1}{2}\right)*\left(-\frac{1}{3}\right)*\left(-\frac{1}{4}\right)*\ldots*\left(-\frac{1}{2021}\right)$$

11) $x*y=6x+6y-3xy-10 \Leftrightarrow x*y=2-3(x-2)(y-2)$, $E=(-10)*(-9)*\ldots*(9)*(10)$

12) $x*y=xy-\sqrt{3}(x+y)+3+\sqrt{3}$, $\Leftrightarrow x*y=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$,

$$E=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}*\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}$$

13) $x*y=-\frac{3}{5}xy+x+y \Leftrightarrow x*y=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, $E=\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{3}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}$

14) $x*y=5(x+y-4)-xy \Leftrightarrow x*y=-(x-5)(y-5)+5$,

$$E=1*(-2)*3*(-4)*\ldots*2029*(-2020)$$

15) $x*y=xy-3(x+y)+12 \Leftrightarrow x*y=(x-3(y-3)+3$, $E=\sqrt{1}*\sqrt{2}*\sqrt{3}*\ldots*\sqrt{2020}$

16) $x*y=3xy-3\sqrt{2}\left(x+y\right)+6+\sqrt{2}$, $x*y=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$,

$$E=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}*\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}*\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{2010}}{\sqrt{2007}}$$

17) $x*y=\frac{x+y+x+y-1}{2} \Leftrightarrow x*y=\frac{1}{2}\left(x+1\right)\left(y+1\right)-1$, $E=(-1)*0*1*2*\ldots*2020$

Befejezésül kihangsúlyozzuk, hogy a bemutatott feladatanyagot érdemes papírral és ceruzával részletesen kidolgozni, mert csak így érthető meg a bemutatott módszer lényege.