VIII. osztályos tanulók figyelmébe !

FELKÉSZÜLTEM-E A FELVÉTELI VERSENYVIZSGÁRA ?

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

8. TESZT

I.1. a) Oldjuk meg az $x(1+|x|) = x + |x|$ egyenletet !

b) Számítsuk ki: $E = 1 + 11 \cdot 12 - 11^2 \cdot 12 + 11^3 \cdot 12 - \ldots + 11^{19} \cdot 12 - 11^{20} \cdot 12 + 11^{21}$.

2. Az a, b, c valós számokra $a + b + c = 0$. Igazoljuk, hogy: $a^3 + a^2c + b^2c - abc + b^3 = 0$. Igaz-e az állítás fordítottja is ?

3. Igazoljuk, hogy a $P(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ polinom nem irreducibilis !

II.1. Bontsuk elsőfokú tényezők szorzatára a következő kifejezést:

$$F = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2.$$

2. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egymástól különböző pozitív négyzetszámok, akkor:

$$ab + bc + ca + 23 \leq 2abc.$$

3. Határozzuk meg azt a $D(X)$ polinomot, amelyre a $P(X) = X^3 - 5X^2 + 13X - 20$ és a $Q(X) = X^3 - 4X^2 + 12X - 14$ polinomoknak a $D(X)$ polinommal való osztási maradéka $R_1(X) = 2X - 5$, illetve $R_2(X) = 3X - 4$!

III.1. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben egy olyan kört rajzolunk, amelynek középpontja a (-3, -2) koordinátájú pont, és sugara 2. Számítsuk ki az O pontból a körhöz húzott érintők A és B érintési pontjai közötti távolságot !

2. Legyen A és B a V csúccsal rendelkező egyenes körkúp alapkörének két, átmérősen ellentett pontja, továbbá $VA = 30$ cm és $AB = 15$ cm. A kúp palástján az A pontból egy hangya indul el úgy, hogy áthalad a VB alkotón is, és körkörösen folytatva útját, a VA alkotó azon M pontjába érkezik, amelyre $AM = \frac{1}{3}AV$.

Számítsuk ki a hangya által megtett út hosszát, tudva azt, hogy az említett módon megtett út, a lehető legrövidebb !

3. Három ólomgolyó sugara rendre 3 cm, 4 cm, 5 cm. A három ólomgolyóból egyetlen golyót öntünk. Az így kapott golyónak a felszíne, hány százaléka a három kisebb golyó összfelszínének ?

Megoldások

I.1.a) Ha $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x(1+|x|) = x + |x| \Leftrightarrow x(1+x) = x + x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \{0, 1\}$ és mindkettő teljesíti az $x \geq 0$ feltételt.

Ha $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x(1+|x|) = x + |x| \Leftrightarrow x(1-x) = x - x \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow x \in \{0, 1\}$ de egyik sem teljesíti az $x < 0$ feltételt.

Tehát az egyenlet megoldása $M = \{0, 1\}$.

b) $E = 1 + 11(11+1) - 11^2(11+1) + 11^3(11+1) - \ldots + 11^{19}(11+1) - 11^{20}(11+1) + 11^{21} =$ $= 1 + (11^2 + 11) - (11^3 + 11^2) + (11^4 + 11^3) - \ldots + (11^{20} + 11^{19}) - (11^{21} - 11^{20}) + 11^{21} = 1 + 11 = 12$.

2. $a^3 + a^2c + b^2c - abc + b^3 = a^3 + b^3 + c(a^2 + b^2 - ab) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) +$ $+c(a^2 + b^2 - ab) = (a^2 - ab + b^2)(a + b + c)$. Tehát a szóbanforgó állítás nyilvánvaló. Fordítva: ha $a^3 + a^2c + b^2c - abc + b^3 = 0 \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 - ab + b^2) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$ vagy $a^2 - ab + b^2 = 0$.

De $a^2 - ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (2a-b)^2 + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow 2a - b = b = 0 \Rightarrow a = b = 0$. Tehát a fordított állítás nem egyértelműen igaz, ellenpélda: $a = b = 0$, $c \in \boldsymbol{R}$ tetszőleges.

3. Megfigyelve, hogy az $X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)$ szorzat az X egész értékeire, egymás utáni öt szám szorzata, akárcsak az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, ezért olyan X értéket próbálunk választani, amelyre $X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ legyen. Ez az érték pontosan $x = -5$, és ekkor $P(-5) = (-5)(-4)(-3)(-2)(-1) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 0$, így Bézout tétele értelmében, $P(X) \vdots (X-5)$, vagyis nem irreducibilis.

II.1. $F = (2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 = [2ac + (a^2 + c^2 - b^2)][2ac - (a^2 + c^2 - b^2)] =$
$= [(a^2 + 2ac + c^2) - b^2][b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)] = [(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2] =$
$= (a+c-b)(a+c+b)(b+a-c)(b-a+c) = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

2. Az a, b, c számokról feltételezhető, hogy $a \geq 1, b \geq 4, c \geq 9$. Ekkor $abc \geq 36$, továbbá

$$\frac{1}{a} \leq 1,\ \frac{1}{b} \leq \frac{1}{4},\ \frac{1}{c} \leq \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{23}{abc} \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{23}{36} = 2 \Leftrightarrow ab + bc + ca + 23 \leq 2abc.$$

3. A feltétel alapján: $K_1(X) := P(X) - R_1(X) = X^3 - 5X^2 + 11X - 15 \vdots D(X)$ és $K_2(X) := Q(X) - R_2(X) = X^3 - 4X^2 + 9X - 10 \vdots D(X)$. A $D(X)$ polinomot többféleképpen is meghatározhatjuk.

1. *módszer*: euklideszi algoritmussal meghatározzuk a K_1 és K_2 polinomok legnagyobb közös osztóját:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 5X^2 + 11X - 15 & X^3 - 4X^2 + 9X - 10 \\ \hline -X^3 + 4X^2 - 9X + 10 & 1 \\ \hline / \quad -X^2 + 2X - 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 4X^2 + 9X - 10 & -X^2 + 2X - 5 \\ \hline -X^3 + 2X^2 - 5X & -X + 2 \\ \hline / \quad -2X^2 + 4X - 10 & \\ 2X^2 - 4X + 10 & \\ \hline / \quad / \quad / \quad / & \end{array}$$

Mivel a K_1 és K_2 ln.k.o.-ja az utolsó nem nulla maradék, ezért $D(X) = a(X^2 - 2X + 5)$.

2. *módszer*. A K_1 és K_2 polinomokat szorzótényezőkre bontjuk úgy, hogy (x - a)-val való osztásokkal próbálkozunk, ahol $a \in D_{15} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$ (a szabadtag osztói), ahonnan $a = 3$ megfelel. Ekkor $K_1(X) = (X-3)(X^2 - 2X + 5)$.

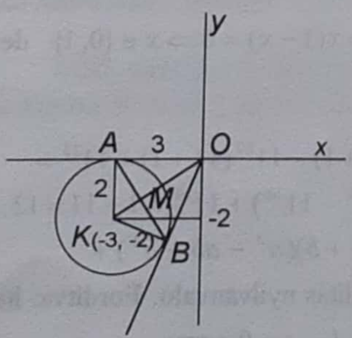
Hasonló módon $K_2(X) = (X-2)(X^2 - 2X + 5)$. Ezek alapján $D(X) = a(X^2 - 2X + 5)$.

3. *módszer*. Mivel $D(X) \mid K_1(X)$ és $D(X) \mid K_2(X) \Rightarrow D(X) \mid (K_2(X) - K_1(X)) = X^2 - 2X + 5$

Innen adódik az ötlet, hogy a K_1, illetve K_2 polinomokat $(X^2 - 2X + 5)$-tel osztjuk, ahonnan

$$D(X) = X^2 - 2X + 5.$$

III.1.



Mivel a kör sugara 2, ezért az O-ból húzott egyik érintő az Ox tengelyen elhelyezkedő OA egyenes. Továbbá tudjuk, hogy:

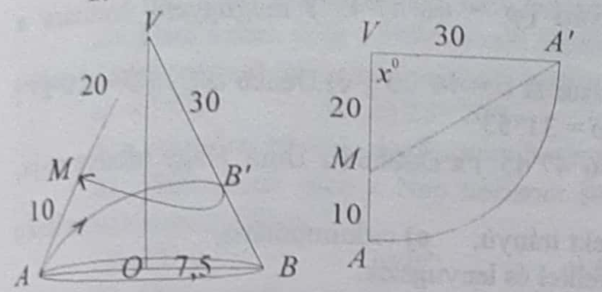
1) Egy külső pontból a körhöz húzott két érintő kongruens, ezért $OA \equiv OB$.

2) A körhöz húzott érintő merőleges az érintési pontban húzott sugárra, ezért $KA \perp OA$ és $KB \perp OB$. Így könnyen belátható, hogy az OAK és OBK háromszögek derékszögűek, sőt kongruensek. Mivel AOB háromszög egyenlő szárú, belátható, hogy $AM \equiv MB$ és $OM \perp AB$, vagyis $AM \perp KO$. Pitagorasz tétele szerint

$$OK^2 = KA^2 + AO^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow OK = \sqrt{13}.$$

De $AM = \dfrac{AK \cdot AO}{KO} = \dfrac{2 \cdot 3}{\sqrt{13}} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$. Így $AB = 2AM = \dfrac{12\sqrt{13}}{13}$.

2.



A mellékelt ábrán az $AB'M$ szemlélteti, a hangya által megtett utat. Először is fejtsük le a kúp palástját. Igazoljuk, hogy ez pontosan egy negyed kör.

Az AA' hossza az alapkör kerülete, ami: $K = 2\pi \cdot 7{,}5 = 15\pi$.

Hármasszabállyal felírható:

$$\begin{array}{l} 360^0 \ldots\ldots 2 \cdot 30\pi \\ x^0 \ldots\ldots\ldots\ldots 15\pi \end{array}, \text{ ahonnan } x = 90^0.$$

Ekkor a legrövidebb $AB'M$ út a lefejtett körcikkben az $A'M$ szakasz hossza, amit a VMA' háromszögből Pitagorasz tételével számítunk ki: $A'M^2 = A'V^2 + MV^2 = 30^2 + 20^2 = 1300 \Rightarrow$ $\Rightarrow A'M = 10\sqrt{13}$ (cm).

3. Mivel a három kis golyó térfogata pontosan a nagy golyó térfogatával egyenlő, ezért:

$$\frac{4\pi}{3} \cdot 3^3 + \frac{4\pi}{3} \cdot 4^3 + \frac{4\pi}{3} \cdot 5^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \Rightarrow R^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3 \Rightarrow R = 6 \text{ (cm) és}$$

$F = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi\,(\text{cm}^2)$. Továbbá $F_1 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$ (cm^2), $F_2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$ (cm^2), $F_3 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ (cm^2) és $S = F_1 + F_2 + F_3 = 200\pi\,(\text{cm}^2)$. Így $\dfrac{F}{S} = \dfrac{144\pi}{200\pi} = \dfrac{72}{100}$, vagyis az F 72%-a S-nek.

CSILLAGÁSZATI GYAKORLATOK ÉRETTSÉGIRE KÉSZÜLŐ TANULÓK SZÁMÁRA

Összeállította: **Szenkovits Ferenc** egyet. lektor, Kolozsvár

Válasszuk ki a helyes választ, vagy válaszokat!

1. A világtengely és az illető hely vertikálisa által meghatározott sík az éggömböt egy főkörben metszi, amelynek a neve:

a) égi egyenlítő; b) horizont; c) parallel; d) ekliptika; e) égi meridián.

2. Van-e olyan hely a Föld felszínén, ahonnan valamennyi csillagkép látható?

a) az Északi- és Déli-sarkokról, b) az egyenlítőről, c) nincs ilyen hely,
d) mindenhonnan, e) a legmagasabb hegycsúcsok tetejéről.

3. A horizont mely pontja található az égi egyenlítőn (ha a megfigyelő nincs a sarkokon)?

a) Észak-pont, b) Dél-pont, c) Észak- és Dél-pont, d) Kelet- és Nyugat-pont, e) nincs közös pontja a horizontnak és az égi egyenlítőnek.

4. Egy megfigyelő a $\varphi = 46°$ földrajzi szélességen áll, és egy csillag felső kulminációját, delelését figyeli. Mekkora a csillag azimutja a delelés pillanatában?

a) 0°, b) 90°, c) 180°, d) 270°, e) 0° vagy 180°.

5. Egy megfigyelő a $\varphi = 46°$ földrajzi szélességen áll, és egy csillag alsó kulminációját figyeli. Mekkora a csillag azimutja a megfigyelés pillanatában?

a) 0°, b) 90°, c) 180°, d) 270°, e) 0° vagy 180°.

6. Melyik koordináta-rendszerben adható meg legegyszerűbben (és hogyan) annak a feltétele, hogy egy égitest a φ földrajzi szélességű megfigyelő számára cirkumpoláris legyen?

a) horizontális koordináta-rendszerben: $h \geq 90° - \varphi$;

b) órakoordináták (első egyenlítői koordináták) segítségével: $\delta \geq 90° - \varphi$;