A K-SZÖGSZÁMOKTÓL A PELL-TÍPUSÚ EGYENLETEKIG*

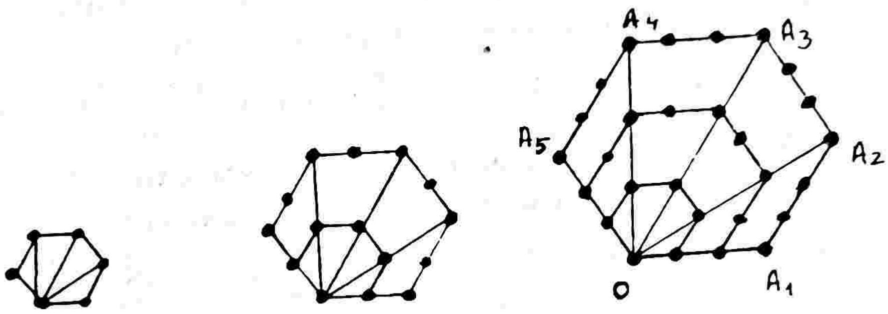
Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

I. A "figurális számok" általánosítása

Az [1]-ben olvashattunk a pitagoreusok által is tanulmányozott, úgynevezett "figurális számokról", mint például a háromszögszámok, a téglalapszámok, a négyzetszámok, a gnómonszámok, a tetraéderszámok és a köbszámok.

Jelen dolgozatban az előző típusú számok általánosításairól, és ezekkel kapcsolatos alkalmazásokról írunk.

Rajzoljunk olyan szabályos k-szögeket, amelyek oldalainak hossza rendre 1, 2, 3, ... egység. Mindegyik sokszögben megjelöljük a csúcsokat és az oldalaknak azokat a pontjait, amelyek egységnyi szakaszokra osztják az oldalakat.



1.ábra

Definíció szerint az első k-szögszám 1, a második k, a harmadik k-szögszám pedig a második k-szög határán és belsejében megjelölt pontok száma. Az n-edik k-szögszám az $(n-1)$-edik szabályos k-szög határán és belsejében megjelölt pontok száma. Ha az n-edik k-szögszámot $S_n(k)$-val jelöljük, akkor

$$S_n(k)=(k-2)H_n-(k-3)n \text{ vagy } S_n(k)=\frac{1}{2}[(k-2)n^2-(k-4)n] \quad \text{(i)}$$

bármely $k,n \in N^*, k \geq 3$ esetén (H_n az n-edik háromszögszám, vö.[1]).

A k-szögszámok bevezetéséről a [2]-ben olvashatunk.

Az első négy 6-szögszámot az 1.ábra szemlélteti.

A [2]-ben található bizonyítástól eltérően, egy eredeti, elemi megoldást mutatunk be.

A bizonyítás során – a személet végett – az 1.ábra utolsó rajzát követjük, de az ott látható hatszög helyett, az $OA_1A_2\ldots A_{k-1}$ szabályos k-szögre gondolunk, amelyet az $OA_1A_2, OA_2A_3, \ldots, OA_{k-2}A_{k-1}$ diszjunkt háromszögekre darabolunk. Ezen háromszögek száma pontosan $k-2$. Ezek szerint az $S_n(k)$-t tulajdonképpen $k-2$ darab H_n-re daraboltuk, csupán az $OA_2, OA_3, \ldots, OA_{k-1}$ szakaszok mentén elhelyezkedő pontok számát kell levonni, hiszen ezeket kétszer számoltuk. Tehát $S_n(k)=(k-2)H_n-(k-3)n$, ahol $H_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (vö.[1]). (Az $OA_2, OA_3, \ldots, OA_{k-1}$ szakaszokon elhelyezkedő pontok száma $(k-3)n$).

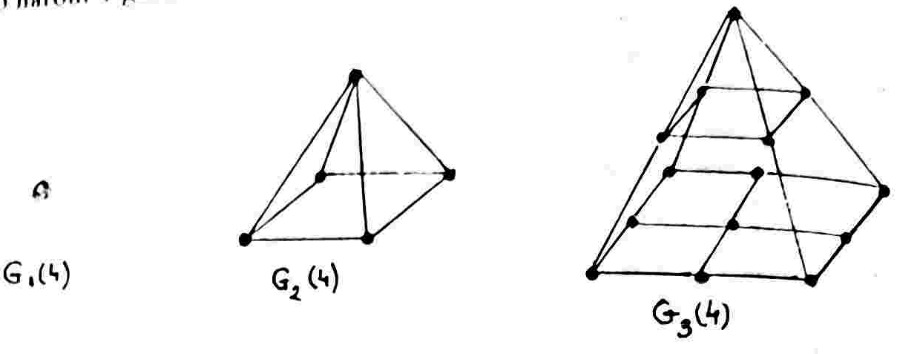
Belátható, hogy $k=3$, illetve $k=4$ esetén az (i)-ből visszakapjuk az n-edik háromszögszámot, illetve az n-edik négyzetszámot.

---

* Jelen dolgozat az [1] folytatása. Az ott használt jelöléseket és eredmények egy részét itt is felhasználjuk.

A k-szögszámok térbeli általánosítására is számos lehetőség adódik. Bevezethetők például az ún. n-edik k-gúlaszámok is. Jelöljük ezt $G_n(k)$-val, minden $k,n \in N^*, k \geq 3$ esetén.

Az első három 4-gúlaszámot a 2.ábra szemlélteti:



2.ábra

Észrevehető, hogy $G_n(k) = S_1(k) + S_2(k) + \ldots + S_n(k)$, bármely $k,n \in N^*, k \geq 3$ esetén.

Az n-edik k-gúlaszámot a következő képletek adják meg:

$$G_n(k) = (k-2)t_n - (k-3)H_n \text{ vagy } G_n(k) = \frac{n(n+1)}{6}[(k-2)n - k + 5] \quad \text{(ii)}$$

bármely $k,n \in N^*, k \geq 3$ esetén (t_n az n-edik tetraéderszám, vö. [1])

Az (i) alapján – az [1]-ben használt jelöléseket és eredményeket használva,

$$G_n(k) = \sum_{i=1}^{n} S_i(k) = (k-2)\sum_{i=1}^{n} H_i - (k-3)\sum_{i=1}^{n} i = (k-2)\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} - (k-3)\frac{n(n+1)}{2} =$$

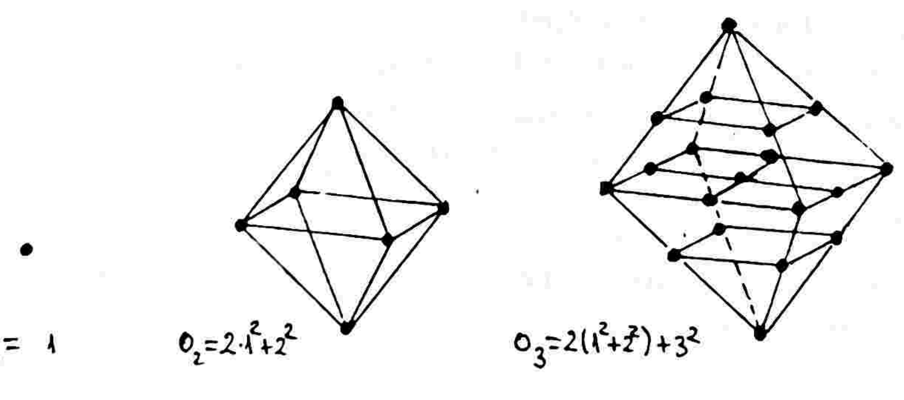
$$= (k-2)\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - (k-3)\frac{n(n+1)}{2},$$

ahonnan (ii) azonnal adódik. Belátható, hogy $k = 3$ esetén, az (ii)-ből visszakapjuk az n-edik tetraéderszám képletét, vagyis $G_n(3) = t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

További általánosításaink során bevezethetők az n-edik k-hasábszámok is, mégpedig m darab ($m \in N^* - \{1\}$) n-edik k-szögszám térbeli, egymást fedő réteges egymásrahelyezésével a következő értelmezés szerint: $H_n(k;m) := m \cdot S_n(k) \overset{(i)}{=} m \cdot \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2}$, $\forall k,n \in N^*, k \geq 3$ esetén (iii).

Belátható, hogy $k = 4$ és $m = n$ esetén a $H_n(4;n) = n^3$ tulajdonképpen az n-edik köbszámot (a K_n-et) adja (vö.[1]).

A szabályosság elvét követve, értelmezhető az n-edik oktaéderszám is. Az első három oktaéderszámot a 3.ábra szemlélteti:



3.ábra

Észrevehető, hogy tulajdonképpen két 4-gúlaszámból állítottuk elő úgy, hogy az "érintkezésüknél" levő pontokat csak egyszer számoltuk. Tehát az n-edik oktaéderszám:

$$O_n = 2 \cdot G_{n-1}(4) \overset{(ii)}{=} 2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{n(2n^2+1)}{3} \qquad \text{(iv)}$$

Természetesen, még sok más típusú (esetleg többdimenziós) "figurális számot" konstruálhatunk. Ilyen irányú alkotásokat az érdeklődő olvasóra bízzuk.

II. A PELL-TÍPUSÚ EGYENLETEKRŐL

A továbbiakban csupán rövid (főleg gyakorlati jellegű) betekintést teszünk az alábbi típusú diofantikus egyenletek ágas-bogas, szerteágazó elméletébe:

(A) $x^2 - ky^2 = 1$ (Pell-egyenlet); (B) $x^2 - ky^2 = -1$ (konjugált Pell-egyenlet);

(C) $x^2 - ky^2 = c$; (D) $ax^2 - by^2 = 1$; (E) $ax^2 - by^2 = c$

ahol minden esetben $a, b, k \in N^*, c \in Z^*$ és k nem teljes négyzet.

A fenti egyenletek megoldását csak az $N^* \times N^*$ halmazon tanulmányozzuk.

(A) Az [1]-ben már jeleztük, hogy a Pell-egyenlet összes megoldását az

$$x_n = \frac{1}{2}[(x_0 + y_0\sqrt{k})^n + (x_0 - y_0\sqrt{k})^n] \text{ és } y_n = \frac{1}{2\sqrt{k}}[(x_0 + y_0\sqrt{k})^n - (x_0 - y_0\sqrt{k})^n] \qquad \text{(a1)}$$

képletek adják, bármely $n \in N^*$ esetén, ahol (x_0, y_0) a legkisebb, ún. minimális vagy bázismegoldás. Ez mindig létezik (vö. [3], [5], [6]), és úgy értelmezik, hogy $y_0 \in N^*$ a megoldások közül a legkisebb.

Az (a1) megoldás egyenértékű még az

$$x_{n+1} = x_0x_n + ky_0y_n \quad \text{és} \quad y_{n+1} = y_0x_n + x_0y_n \qquad \text{(a2)}$$

rekurziós egyenletrendszerrel, $\forall n \in N^*$ esetén (vö. [1]). Ha az első egyenletből kifejezzük az y_n-et, majd átírva ezt y_{n+1}-re is, az (a2) második egyenlete alapján, (a2) egyenértékű az

$$x_{n+1} = 2x_0x_n - x_{n-1} \quad \text{és} \quad y_{n+1} = 2x_0y_n - y_{n-1}, \quad x_1 = x_0^2 + ky_0^2, \quad y_1 = 2x_0y_0 \qquad \text{(a3)}$$

rekurziós egyenletrendszerrel.

Gyakorlati szempontból különösen fontos az (x_0, y_0) bázismegoldás megkeresése. Legjobb esetben ezt találgatással megejthetjük, de pl. már az $x^2 - 13y^2 = 1$ egyenlet esetén nem valószínű, hogy rájönnénk az $x_0 = 649$ és $y_0 = 180$ bázismegoldásra.

Ma is érdekesség számba megy, hogy *Waclaw Sierpinski* lengyel matematikus (1882-1969) ahhoz a feltevéshez jutott, hogy az általa tanulmányozott $x^2 - 991y^2 = 1$ egyenletnek nincs bázismegoldása. Végül azonban kiderült a bázismegoldás:

$x_0 = 379516400906811930638014896080$

$y_0 = 12055735790331359447442538767$

A bázismegoldás keresésére *J. Lagrange* a $\sqrt{k}$-nak az ún. lánctörtbe fejtését alkalmazta (vö. [5], [6], [7]). Gyakorlati szempontból erről kiváltképpen a [3], [7], [8]-ban olvashatunk.

(B) A konjugált Pell-egyenlet összes megoldását az

$$x_n = \frac{1}{2}[(x_0' + y_0'\sqrt{k})^{2n-1} + (x_0' + y_0'\sqrt{k})^{2n-1}], \; y_n = \frac{1}{2\sqrt{k}}[(x_0' + y_0'\sqrt{k})^{2n-1} - (x_0' - y_0'\sqrt{k})^{2n-1}] \qquad \text{(b1)}$$

képletek adják meg, bármely $n \in N^*$ esetén (vö. [5], [6], lásd [1] is). A lényeges különbség itt azonban az, hogy az (x_0', y_0') bázismegoldás csak akkor létezik, ha a $\sqrt{k}$ lánctörtbe-fejtésében a periódus páratlan szám (vö. [5], [6]). Talán érdemes megjegyezni (hisz gyakorlati szempontból is fontos), hogy a Pell-egyenlet és a konjugált Pell-egyenlet bázismegoldásai között fennáll az $x_0+y_0\sqrt{k}=(x_0'+y_0'\sqrt{k})^2$ összefüggés (vö. [6]). Egyébként a konjugált Pell-egyenlet esetén is levezethetők az (a2) és (a3)-hoz hasonló, analóg (b2) és (b3) összefüggések is (vö. [1]).

(C) Az $x^2-ky^2=c$ típusú egyenlet, a $|c|<\sqrt{k}, c\neq 0$ esetén, a megoldhatóság szempontjából, még a "tisztázott" Pell-típusú egyenletek közé tartozik. A megoldásáról [5]-ben olvashatunk.

(D) A [4] és [10] alapján, az $ax^2-by^2=1$ egyenletről a következőket hangsúlyozzuk ki:

1) Ha $ab=k^2$ $(k\in N^*-\{1\})$, akkor $a=k_1^2, b=k_2^2$ $(k_1,k_2\in N^*)$ és így $k_1^2x^2-k_2^2y^2=1\Leftrightarrow(k_1x-k_2y)(k_1x+k_2y)=1$, így $1<k_1x+k_2y=k_1x-k_2y=1$, ami ellentmondás, vagyis a szóbanforgó egyenletnek nincs megoldása.

2) Amennyiben $ab\neq k^2$ $(k\in N^*-\{1\})$ végezzük el az $x=x_0u+by_0v$ és $y=y_0u+ax_0v$ lineáris transzformációt. Ennek alapján

$$1=ax^2-by^2=a(x_0u+by_0v)^2-b(y_0u+ax_0v)^2=(ax_0^2-by_0^2)(u^2-abv^2)=u^2-abv^2.$$

Amennyiben tehát az $ax^2-by^2=1$ egyenletnek létezik (x_0,y_0) bázismegoldása, úgy a teljes megoldása az $u^2-abv^2=1$ Pell-egyenlet megoldására vezetődik vissza.

A legnehezebb gyakorlati probléma itt az, hogy még nem létezik olyan elmélet, amely eldöntené mely (D) típusú egyenletnek van bázismegoldása, csupán sajátos eseteket tanulmányoznak (vö. [9], [10], [11]).

(E) A szóbanforgó egyenlet megoldása érdekében az ún. Lagrange-féle módszerrel próbálkozunk (vö. [4], 185.old.). A módszer lényege az, hogy elvégezzük az $x=\alpha y+cz$ lineáris transzformációt, és úgy határozzuk meg az $\alpha\in Z$ számot, hogy a szabadtag ±1 legyen. Ezután az $y=\beta z+t$ lineáris transzformációt alkalmazzuk azzal a céllal, hogy meghatározzuk a $\beta\in Z$ számot úgy, hogy a zt tag együtthatója nulla legyen.

Amennyiben léteznek ilyen $\alpha,\beta\in Z$ számok, úgy az (A), (B) vagy (D) egyenletek valamelyikéhez jutunk.

A túlzott elvonatkoztatás elkerülése érdekében ezt a módszert, a 3.alkalmazás során mutatjuk be

III. ALKALMAZÁSOK

Az elkövetkezőkben ízelítőt adunk a k-szögszámok széleskörű és sokrétű alkalmazási lehetőségeiből.

1.*alkalmazás.* Igazoljuk, hogy azoknak a p-szögszámoknak a megkeresése, amelyek egyidőben q-szögszámok is, egy $ax^2-by^2=c$, $a,b\in N^*, c\in Z$ típusú egyenlet megoldásához vezet ($p,q\in N$, $p\geq 3, q\geq 3$).

Bizonyítás. Az n-edik p-szögszám: $S_n(p)=\frac{1}{2}[(p-2)n^2-(p-4)n]$, valamint az m-edik q-szögszám: $S_m(q)=\frac{1}{2}[(q-2)m^2-(q-4)m]$. Mivel

$$S_n(p)=\frac{4(p-2)^2n^2-4(p-2)(p-4)n}{8(p-2)}=\frac{[2(p-2)n-(p-4)]^2-(p-4)^2}{8(p-2)}$$

az $S_n(p)=S_m(q)$ így alakul:

$$\frac{[2(p-2)n-(p-4)]^2-(p-4)^2}{8(p-2)}=\frac{[2(q-2)m-(q-4)]^2-(q-4)^2}{8(q-2)}.$$

A műveletek elvégzése után egy $ax^2-by^2=c$ (*) egyenlethez jutunk, ahol $a=q-2$, $b=p-2$, $c=(q-p)(2p+2q-pq)$, $x=2(p-2)n-(p-4)$, $y=2(q-2)m-(q-4)$.

2.*alkalmazás.* Bizonyítsuk be, hogy minden hatszögszám egyben háromszögszám is!

1.*bizonyítás.* Az n-edik háromszögszám, illetve az m-edik hatszögszám képlete $S_n(3)=\dfrac{n(n+1)}{2}$, illetve $S_m(6)=\dfrac{4m^2-2m}{2}$, és az $S_n(3)=S_m(6)$ egyenlőség az 1.alkalmazás (*) relációi alapján ($p=3$, $q=6$ vagy $p=6$ és $q=3$ értékekre) a $4x^2-y^2=0$ egyenlethez vezet, ahol $x=2n+1$ és $y=8m-2$. Tehát a $(2x-y)(2x+y)=0$ alapján $y=2x$, vagyis $8m-2=4n+2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n=2m-1$.

Tehát az m-edik hatszögszám megegyezik a $(2m-1)$-edik háromszögszámmal.

2.*bizonyítás.* Ez utóbbi eredményt azonnal megkapjuk, ha észrevesszük, hogy:

$$S_m(6)=\frac{4m^2-2m}{2}=\frac{(2m-1)^2+(2m-1)}{2}=\frac{(2m-1)(2m-1+1)}{2}=S_{2m-1}(3).$$

Megjegyzés. Érdemes észrevenni, hogy az 1.alkalmazás (*) egyenletében $c=0$ csakis az előző esetben teljesül, vagyis ha $p=3$, $q=6$ vagy $p=6$, $q=3$ (nyilván a $p=q$ eset kizárt).

Ez valóban így van, hiszen a $c=0$ és $p\neq q$ alapján, $2p+2q-pq=0\Leftrightarrow p=2+\dfrac{4}{q-2}\in\boldsymbol{N}$, ahonnan $q-2\in\{1,2,4\}$. Így $q\in\{3,4,6\}$. Ha $q=3\Rightarrow p=6$; ha $q=4\Rightarrow p=4\Rightarrow p=q$, ami nem lehetséges; ha $q=6\Rightarrow p=3$.

3.*alkalmazás.* Határozzuk meg azokat az ötszögszámokat, amelyek egyben háromszögszámok is.

Megoldás. Az m-edik ötszögszám: $S_m(5)=\dfrac{3m^2-m}{2}$ $(m\in\boldsymbol{N}^*)$ és az n-edik háromszögszám: $S_n(3)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ $(n\in\boldsymbol{N}^*)$. Az $S_m(5)=S_n(3)$ a (*) átalakítás szerint (a $p=5$ és $q=3$-ra) az $a=1$, $b=3$, $c=-2$, $x=6n-1$ és $y=2m+1$ (1) mellett az $x^2-3y^2=-2$ (i) egyenlethez vezet.

Ennek a megoldása végett az ún. Lagrange-féle módszert alkalmazzuk. Végezzük el az $x=\alpha y-2z$ (2) lineáris transzformációt azzal a céllal, hogy az (i) egyenlet szabad tagja $+1$ vagy -1 legyen. A számítások elvégzése után kapjuk, hogy:

$$\alpha^2y^2-4\alpha yz+4z^2-3y^2=-2 \text{ vagy } \frac{\alpha^2-3}{2}y^2-2\alpha yz+2z^2=-1 \quad \text{(ii)}.$$

Az $\alpha\in\boldsymbol{Z}$ értékét úgy határozzuk meg, hogy $\dfrac{\alpha^2-3}{2}\in\boldsymbol{Z}^*$ legyen. Látható, hogy $\alpha=3$ megfelel, ezért az (ii) így alakul: $3y^2-6yz+2z^2=-1$ (iii). Most az $y=\beta z+t$ (3) lineáris transzformációt végezzük el azzal a céllal, hogy az yz alakú tag együtthatója nulla legyen. A traszformáció nyomán (iii) így alakul:

$$(3\beta^2-6\beta)z^2+(6\beta-6)zt+3t^2=-1 \qquad \text{(iv)}$$

Amennyiben $\beta=1$, úgy az (iv) egyenlet $z^2-3t^2=1$ (v) Pell-egyenletté alakul.

Ennek a bázismegoldása $z_0=2$ és $t_0=1$, ezért az (a1) alapján a megoldások:

$$z_r=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^r+(2-\sqrt{3})^r] \quad (4.1) \quad \text{és } t_r=\frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^r-(2-\sqrt{3})^r] \quad (4.2)$$

bármely $r\in\boldsymbol{N}^*$ alapján. A (2) és (3) transzformációk szerint $x_r=3y_r-2z_r$ (5) és $y_r=z_r+t_r$ (6), ahonnan $x_r=z_r+3t_r$ (7.1) és $y_r=z_r+t_r$ (7.2) bármely $r\in\boldsymbol{N}$ esetén. Ezért a (4.1) és (4.2) alapján az (i) egyenlet összes megoldásai:

$$x_r=\frac{(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^r-(3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^r}{2\sqrt{3}} \qquad (8.1) \qquad \text{és}$$

$$y_r = \frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^r - (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^r}{2\sqrt{3}} \quad (8.2),\ \forall r \in N.$$

A feladatra a végső választ azonban a $6n-1=x_r$ (9.1) és $2m+1=y_r$ (9.2) egyenletekből kapjuk meg. Ebből kifolyólag, írjuk fel az (v) egyenletre az (a3) típusú rekurziókat is, miszerint:

$z_r = 4z_{r-1} - z_{r-2}$ (10.1) és $t_r = 4t_{r-1} - t_{r-2}$ (10.2) bármely $r \in N^* - \{1\}$ esetén,

és $z_0 = 2, z_1 = 7, t_0 = 1, t_1 = 4$ (pl. a (4.1) és (4.2)-ből).

A (7.1), (10.1) és (10.2) alapján $x_r = z_r + 3t_r = 4z_{r-1} - z_{r-2} + 3(4t_{r-1} - t_{r-2}) =$ $= 4(z_{r-1} + 3t_{r-1}) - (z_{r-2} + 3t_{r-2}) = 4x_{r-1} - x_{r-2}$, és hasonlóan számolunk a (7.2) esetén is. Tehát $x_r = 4x_{r-1} - x_{r-2}$ (11.1) és $y_r = 4y_{r-1} - y_{r-2}$ (11.2), valamint a (7.1), (7.2) vagy a (8.1), (8.2) alapján $x_0 = 5, x_1 = 19; y_0 = 3, y_1 = 11$. Könnyen belátható, hogy az $(y_r)_r$ sorozat tagjai mind páratlan számok, ez például a (11.2) alapján indukcióval igazolható. Tehát a (9.2) feltétel minden $r \in N$ esetén teljesül.

Írjuk fel most rendre az $(x_r)_r$ sorozat néhány tagját: 5, 19, 71, 265, 989, ... (12)

Észrevehető, hogy $x_{2k} = \mathcal{M}6 - 1$, míg $x_{2k+1} = \mathcal{M}6 + 1$ alakú (13), bármely $k \in N$ esetén. Így a matematikai indukciót alkalmazva, a (11.1) alapján $x_{2k+2} = 4x_{2k+1} - x_{2k}$, $\forall k \in N$, és igaznak fogadva el a (13) állításokat, rendre felírható, hogy $x_{2k+2} = 4(\mathcal{M}6 + 1) - (\mathcal{M}6 - 1) = \mathcal{M}6 + 5 =$ $= \mathcal{M}6 - 1$. Tehát a (9.1) és (9.2.) megoldásai $n_k = \frac{x_{2k}+1}{6}$ (14.1) és $m_k = \frac{y_{2k}-1}{2}$ (14.2), $\forall k \in N$.

Így azok a számok, amelyek egyben ötszögszámok is és háromszögszámok is

$$S_k(5,3) := \frac{n_k(n_k+1)}{2} = \frac{3m_k^2 - m_k}{2} \quad (15),\ \forall k \in N.$$

Az x_{2k} és y_{2k} értékeket leghamarabb a (11.1) és (11.2)-ből kapjuk meg, majd az n_k, m_k értékeket a (14.1) és (14.2)-ből, de a (8.1) és a (8.2) az $r = 2k$ esetén, a megoldásokat zárt alakban is megadja.

Néhány példa $k \in \{0, 1, 2\}$ esetén:

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1 = \frac{3\cdot 1^2 - 1}{2},\ \frac{20\cdot 21}{2} = 210 = \frac{3\cdot 12^2 - 12}{2},\ \frac{285\cdot 286}{2} = 40755 = \frac{3\cdot 165^2 - 165}{2},$$

vagyis 1, 210, 40755 egyben háromszög- és ötszögszámok is.

SZAKIRODALOM

[1] *Tuzson Zoltán*: A golyós számológéptől néhány összegképletig, ML 10/1995.

[2] *Sz. N. Olehnyik, F. V. Nyesztyerenko, M. K. Potopov*: Régi szórakoztató feladatok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1990 (47-48 o.).

[3] *Eugen Rusu*: Aritmetica şi teoria numerelor, 2.kötet, Editura Tehnică, Bucureşti, 1961 (159-172 o.).

[4] *P. Radovici Mărculescu*: Probleme de teoria elementară a numerelor, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.

[5] *P. Radovici Mărculescu*: Ecuaţii diofantice fără soluţii, GM-A 3/1980.

[6] *Gheorghe Udrea*: Asupra formei soluţiilor ecuaţiilor $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, GM-A 4/1989.

[7] *Maurer I. Gyula*: Tizedes törtek és lánctörtek, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár 1981 (158-190 o.).

[8] *Balázs Márton, Kolumbán József*: Matematikai analízis, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1978 (54 o.).

[9] *T. Andreescu, D. Andrica*: Asupra rezolvării în numere naturale a ecuaţiei $ax^2 - by^2 = 1$, GM 4/1980.

[10] *T. Andreescu, D. Andrica*: Az $ax^2 - by^2 = 1$ egyenlet egy bázismegoldásának a létezése, ML 2/1981.

[11] *T. Andreescu, D. Andrica*: Feltételek arra vonatkozóan, hogy az $an+b$ és $cn+d$ számok egyidőben teljes négyzetek legyenek, ML 7/1983.