FÜGGVÉNYEKKEL KAPCSOLATOS FELADATOK

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

Az alábbiakban közölt feladatok segítségével, nagyrészt az elsőfokú és részben a másodfokú függvények olyan jellemző tulajdonságaira térünk ki, amelyek sikeresen megalapozhatják, elmelyíthetik és megszilárdíthatják a tanulók ismereteit.

A feladatsort főleg a VII. és VIII. osztályos tanulóknak ajánlom, de sikeresen hasznalható a IX. osztályban is.

Az összegyűjtött változatos feladatok megoldása megkönnyíthetik a IX. osztályban bevezetésre kerülő szürjektív, injektív, bijektív függvények, függvényleszűkítés, összetett függvények tanításánál adódó nehézségek áthidalását is.

(1) Az $f_k: E_k \to F_k$ függvény bármely $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ esetén az $f_k(x) = 2x+1$ összefüggéssel értelmezett, ahol $E_1 = \{-1,1\}$, $E_2 = [-1,1)$, $E_3 = (-1,\infty)$, $E_4 = (-\infty,1]$, $E_5 = \mathbf{R}$, $E_6 = \mathbf{N}$, $E_7 = \mathbf{Z}$. Külön koordináta-rendszerben ábrázoljuk az f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 függvényeket, majd határozzuk meg az F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7 halmazokat is.

(2) Tekintsük az $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x-1$ és $g(x) = \begin{cases} 2x-1, & ha\ x \le 0 \\ x-2, & ha\ x > 0 \end{cases}$ függvényeket. Ábrázolás nélkül, határozzuk meg ezen függvények Ox és Oy tengelyekkel való metszespontjai koordinátáit.

(3) Ábrázolás nélkül, határozzuk meg az f, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=2x$ és $g(x)=3x-1$ függvények metszéspontjainak a koordinátáit.

(4) Ugyanaz a feladat az f, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} 3x-1, & ha\ x\leq 0 \\ x-2, & ha\ x>0 \end{cases}$ és $g(x)=\begin{cases} 2x, & ha\ x\leq -2 \\ 5x+1, & ha\ x>-2 \end{cases}$ függvények esetén is. ((3) feladat)

(5) Ábrázoljuk az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-2, & ha\ x\in[-3,3]\setminus\mathbf{N} \\ 1, & a\ többi\ esetben \end{cases}$ függvényt.

(6) Külön koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\max(x-2,1-x)$, illetve $g(x)=\min(x-2,1-x)$ függvényeket.

($\max(a,b)=\begin{cases} a, & ha\ a\geq b \\ b, & ha\ a<b \end{cases}$ és $\min(a,b)=\begin{cases} a, & ha\ a\leq b \\ b, & ha\ b<a \end{cases}$)

(7) Ugyanaz a feladat az $f,g,h,k: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x)=|x-1|$, $g(x)=|x|-1$, $h(x)=|x-1|+x-1$, $k(x)=|x-1|+|x+1|$ függvények esetén.

(8) Tekintsük az $f,g,h,k: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényeket, ahol $f(x)=\max(x-2,1-x)$, $g(x)=\min(x-2,1-x)$, $h(x)=\frac{|2x-3|-1}{2}$, $k(x)=+\frac{|2x-3|+1}{2}$. Igazoljuk, hogy $f=h$ és $g=k$.

(9) Legyen f, $g: \mathbf{R}\setminus\{0,1\}$, $f(x)=\begin{cases} 1, & ha\ x>0 \\ 0, & ha\ x<0 \end{cases}$, $g(x)=\frac{x+\sqrt{x^2}}{2x}$. Igazoljuk, hogy $f=g$.

(10) Határozzuk meg azt az elsőfokú függvényt, amelynek a grafikonja áthalad az $A(1,5)$ és $B(-2,-1)$ pontokon.

(11) Határozzuk meg azt az elsőfokú függvényt, amelynek a grafikonja az $A(1,5)$ kezdőpontú félegyenes, és áthalad a $B(-2,-1)$ ponton.

(12) Határozzuk meg azt az elsőfokú függvényt, amelynek a grafikonja az AB zárt szakasz, ahol $A(1,5)$ és $B(-2,-1)$.

(13) Az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=ax+b-a^2$ függvény grafikonja áthalad az $A(1,1)$ és $B(3,1)$ pontokon. Átmegy-e a $C(4,5)$ ponton is?

(14) Legyen $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x+b, & ha\ x<2 \\ ax+5, & ha\ x\geq 2 \end{cases}$, ahol $a,b\in\mathbf{R}$. Melyek azok az a, b értékek, melyekre az f grafikus képe az $A(-2,4)$, $B(3,3)$ pontokon halad át?

(15) Tekintsük az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} -\frac{x}{2}+3, & ha\ x\leq 2 \\ 3, & ha\ x>2 \end{cases}$ függvényt. Határozzuk meg az f grafikonjának azon pontjait, amelyek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy abszcisszájuk egyenlő az ordinátájukkal. (Az ilyen pontot az f függvény fixpontjának nevezik.)

(16) Tekintsük az $f,g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=x+6$, $g(x)=2-x$ függvényeket. Igazoljuk, hogy a két függvény grafikus képe merőleges egymásra.

(17) Számítsuk ki az adott függvények és az Ox tengely által határolt síkrész területét a következő esetekben:

a) $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & ha\ x\in[-4,0] \\ -x+4, & ha\ x\in(0,4] \end{cases}$$

b) $g:[-4,4]\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases} x+4, & ha\ x\in[-4,-2) \\ 2, & ha\ x\in[-2,2] \\ -x+4, & ha\ x\in(2,4] \end{cases}$$

c) $h:[-4,4]\to\mathbb{R}$

$$h(x)=\begin{cases} x+4, ha\ x\in[-4,-2) \\ \frac{x}{2}+3, ha\ x\in[-2,2] \\ -2x+8, ha\ x\in(2,4] \end{cases}.$$

(18) Határozzuk meg az

$$f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x,\ g(x)=3x,\ h(x)=-x+8$$

függvények grafikus képei által határolt háromszög területét.

(19) Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & ha\ x\geq 2 \\ -x-2, & ha\ x<2 \end{cases}$, határozzuk meg azokat az $x\in\mathbb{R}$ értékeket, amelyekre az f grafikonja nincs az Ox tengely alatt.

(20) Igazoljuk, hogy bármely f elsőfokú függvény esetén

(a) $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, $(\forall)\,x_1,x_2\in\mathbb{R}$;

(b) $f(x)+2f(x+2)=3f(x+1)$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$.

(21) Határozzuk meg azokat az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ elsőfokú függvényeket, amelyekre bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén $f(x)+f(1-x)=1$.

(22) Ugyanaz a feladat az $f(f(x))=f(x)+x$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$ esetben is.

(23) Határozzuk meg azokat az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $f(x-1)=3x-8-f(1)$, illetve $g\left(\frac{1-6x}{2}\right)=6x+2$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$.

(24) Ugyanaz a feladat a $2f(x+1)+g(x-1)=2x+14$ és $f(x+1)-2g(x-1)=6x-18$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$ összefüggések esetében is.

(25) Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ úgy hogy bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén fennálljon az $af(x-1)+bf(-x)=2x+1$ összefüggés. Ha $f(-2)=5$ és $f(1)=1$, határozzuk meg az $a,b\in\mathbb{R}$ értékeit.

(26) Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $2f(x)+3f(1-x)=x$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy $f(x)+f(1-x)=0{,}2$ majd határozzuk meg $f(x)$-et.

(27) Határozzuk meg azokat az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $2f(x)+f(-x)=\begin{cases} -x-3, & \text{ha } x\leq 1 \\ x+3, & \text{ha } x>1 \end{cases}$ $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$.

(28) Ha $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$ és $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, írjuk fel az $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$ kifejezéseket.

(29) Határozzuk meg azokat az f függvényeket, amelyekre

(a) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $(\forall)\ (x)\geq 2$;

(b) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, $(\forall)\,x>0$;

(c) $f\left(\frac{x}{1+x}\right)=x^2$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}-\{-1\}$.

(30) Az f, g, h, k függvények a következő módon adottak: $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $g(x)=f(f(x))$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $h(x)=g(f(x))$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $k(x)=h(f(x))$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Igazoljuk, hogy $f=k$.

(31) Igazoljuk, hogy bármely f másodfokú függvény esetén $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$.

(32) Igazoljuk, hogy bármely f másodfokú függvény esetén $\frac{f(x)+f(y)}{2}\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, $(\forall)\,x,y\in\mathbb{R}$ vagy $\frac{f(x)+f(y)}{2}\leq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, $(\forall)\,x,y\in\mathbb{R}$.

(33) Külön koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\max(1,x,x^2)$ és $g(x)=\min(1,x,x^2)$ függvényeket.

(34) Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $f(x)=x^2-8x+3$. Létezik-e olyan $T\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ szám, amelyre $f(T+x)=f(x)$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ esetén? Hát olyan $T\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ szám, amelyre $f(T-x)=f(x)$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ esetén?

(35) Határozzuk meg azokat az f másodfokú függvényeket, amelyekre bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén $f(x+1)=f(-x)$.

(36) Tekintsük az
$f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=(m^2-3x+2)x^3+(m^2-4m+3)x^2+(m^2-1)x+7$ függvénycsaládot; ahol $m\in\mathbb{R}$. Határozzuk meg azokat az m értékeket, melyekre a család tagjai másodfokú függvények? Melyek az elsőfokú függvények?

(37) Jelölje T az $f(x)=4x^2-4x+3$ függvény grafikus képe és az OX tengely által határolt síkrész területét. Igazoljuk, hogy $1<T<2$.

(38) Határozzuk meg az $f(x)=2x^2-2x+2$ és $g(x)=x^2+2x-1$ függvények metszéspontjainak koordinátáit.

(39) Legyen $f,g_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+2$, $g_m(x)=mx+1$ és $m\in\mathbb{R}$. Határozzuk meg az m értékét úgy, hogy
a) g_m grafikonja érintse az f grafikonját;
b) g_m grafikonja az f grafikonját két különböző pontban messe;
c) g_m és f grafikonjának ne legyen közös pontja.

(40) Tekintsük az $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ és $g:B\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+2x}$ racionális függvényeket. Határozzuk meg azokat a maximális $A,B\subset\mathbb{R}$ részhalmazokat, amelyekre $f=g$.

(41) Adottak az $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ és $g:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}2, & \text{ha } x\in[1,2]\\ 2\sqrt{x-1}, & \text{ha } x>2\end{cases}$. Igazoljuk hogy $f=g$.

(42) Az $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ másodfokú függvények kielégítik a következő összefüggéseket: $f(f(x))=x^4-8x^2+12$, $g(g(x))=x^4-4x^2+6$. Igazoljuk, hogy $g(x)=f(x)+6$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

(43) Ha $f(x)=x^2+1$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, igaz-e, hogy:
a) bármely $y\in\mathbb{R}$ esetén létezik $x\in\mathbb{R}$ úgy, hogy $y=f(x)$?
b) bármely $y\geq 1$ esetén létezik $x\geq 0$ úgy, hogy $y=f(x)$?
c) bármely $y>1$ esetén létezik $x<0$ úgy, hogy $y=f(x)$?

(44) Bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén legyen $f(x)=x^2-3x+2$. Ha $f(x_1)=f(x_2)$ igaz-e, hogy $x_1=x_2$?

(45) Bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén legyen $f(x)=x^2-x+1$. Igaz-e, hogy ha $x_1\neq x_2$, akkor $f(x_1)\neq f(x_2)$?

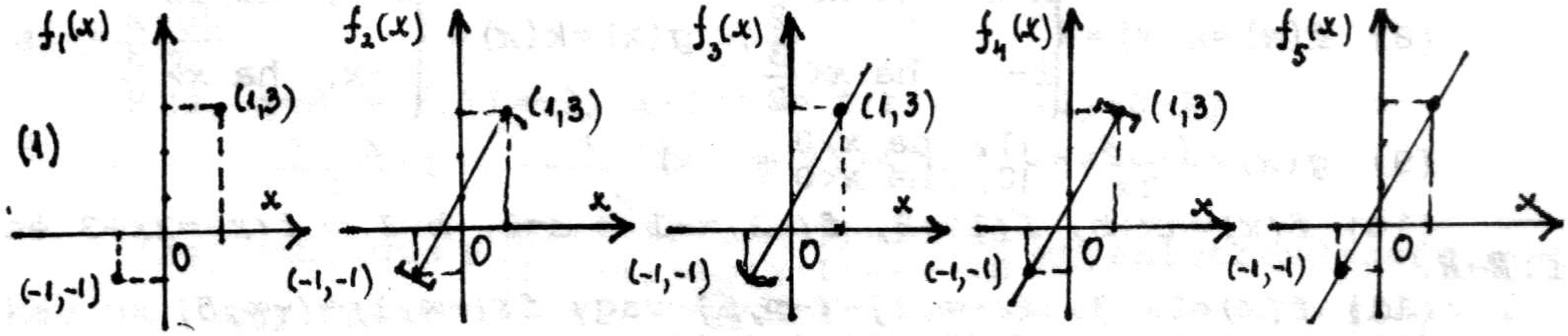
(46) Ha bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén $f(x)=x^2-2x+1$, igazoljuk, hogy végtelen sok olyan $x_1\neq x_2$ valós szám létezik, amelyre $f(x_1)=f(x_2)$.

(47) Legyen $f_m(x)=\begin{cases}1-x, & \text{ha } x\leq 0\\ m-x, & \text{ha } x>0\end{cases}$, ahol $m>1$ rögzített. Ha $f_m(x_1)=f_m(x_2)$ igaz-e, hogy $x_1=x_2$?

(48) Legyen $f:E\to F$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Határozzuk meg azokat a maximális $E,F\subset\mathbb{R}$ részhalmazokat, amelyekre $f(E)=F$ $(f(E)=\{f(x)\mid x\in E\})$.

ÚTMUTATÁSOK A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

(1)



Továbbá $G_{f_5}=\{(n,2n+1)\mid n\in\mathbf{N}\}$, $G_{f_6}=\{(n,2n+1)\mid n\in\mathbf{Z}\}$, $F_1=\{-1,3\}$, $F_2=[-1,3)$, $F_3=(-1,+\infty)$, $F_4=(-\infty,3]$, $F_5=\mathbf{R}$.

(2) $f(0)=-1$, $G_f\cap Oy=\{(0,-1)\}$; $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\in\mathbf{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow G_f\cap Ox=\{(\frac{1}{2},0)\}$.

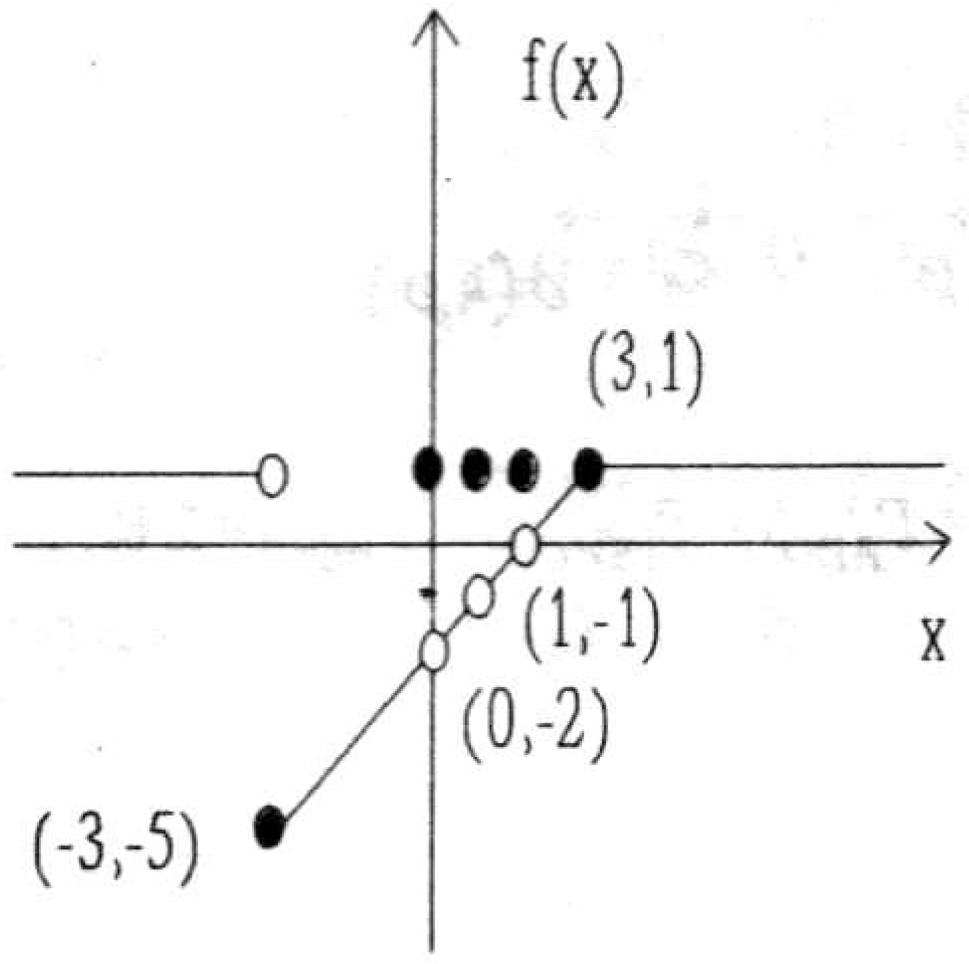
$g(0)=-1$, $G_g\cap Oy=\{(0,-1)\}$, $g(x)=0$

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & x>0,\ x-2=0 \quad\Rightarrow x=2 \\ 2) & x<0,\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2},\ \text{nincs megoldás}\end{array}\right\}\ G_g\cap O_x=\{2,0\}.$$

(3) $2x=3x-1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=g(1)=2 \Rightarrow f\cap g=\{(1,2)\}$.

(4) $\begin{cases}3x-1=5x+1\\ x\le 0\\ x>-2\end{cases} \Rightarrow x=-1$, $\begin{cases}x-2=2x\\ x>0\\ x\le -2\end{cases} \Rightarrow x\in\emptyset$, $\begin{cases}x-2=5x+1\\ x>0\\ x>-2\end{cases} \Rightarrow x\in\emptyset$;

$f\cap g=\{(-1,-4)\}$



(5) A teli pont (•) azt jelenti, hogy a pont hozzátartozik a grafikus képhez, míg az üres karikával (∘) jelzett pont nem tartozik hozzá a grafikonhoz.

(6) $f(x)=\begin{cases}x-2, & \text{ha } x\ge\frac{3}{2}\\ 1-x, & \text{ha } x<\frac{3}{2}\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x-2, & \text{ha } x\le\frac{3}{2}\\ 1-x, & \text{ha } x>\frac{3}{2}\end{cases}$

(7) $f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{ha } x\ge 1\\ -x+1, & \text{ha } x<1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x-1, & \text{ha } x\ge 0\\ -x-1, & \text{ha } x<0\end{cases}$,

$h(x)=\begin{cases}2x-2, & \text{ha } x\ge 1\\ 0, & \text{ha } x<1\end{cases}$, $k(x)=\begin{cases}-2x, & \text{ha } x\le -1\\ 2, & \text{ha } -1<x<1\\ 2x, & \text{ha } x\ge 1\end{cases}$

(8) $f(x)=h(x)=\begin{cases} x-2, & \text{ha } x\geq \frac{3}{2} \\ 1-x, & \text{ha } x<\frac{3}{2} \end{cases}$, $g(x)=k(x)=\begin{cases} x-2, & \text{ha } x\leq \frac{3}{2} \\ 1-x, & \text{ha } x>\frac{3}{2} \end{cases}$

(9) $g(x)=\frac{x+|x|}{2x}=\begin{cases} 1, & \text{ha } x>0 \\ 0, & \text{ha } x<0 \end{cases}=f(x)$

(10) $f(x)=ax+b,\ f(1)=5,\ f(-2)=-1 \Rightarrow a=2,\ b=3 \Rightarrow f(x)=2x+3$ és $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(11) $f(x)=2x+3,\ f(-\infty,1]\to(-\infty,5]$ vagy $f:(-\infty,1)\to(-\infty,5)$

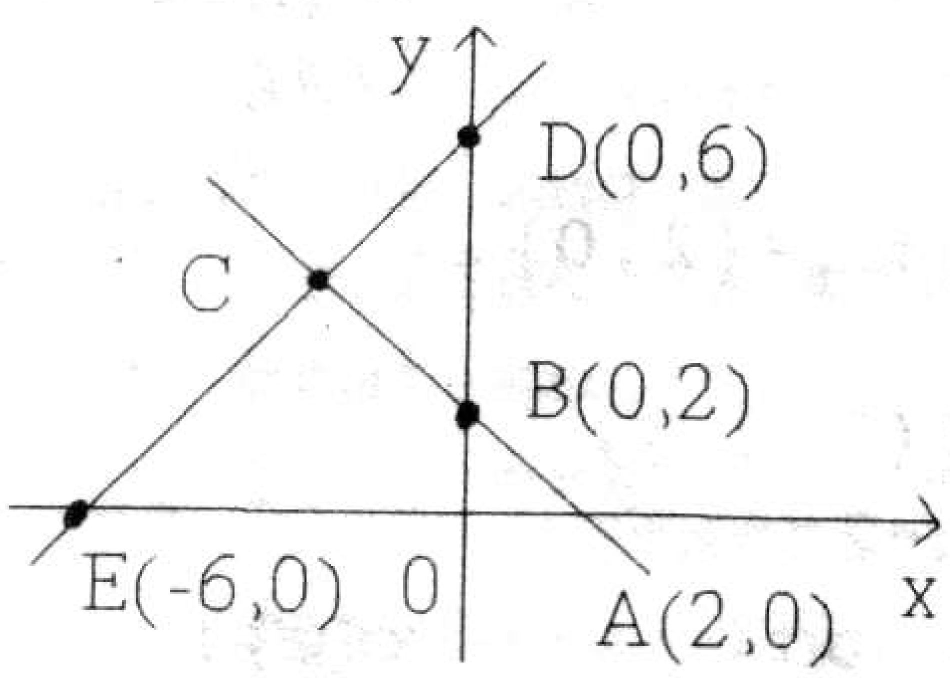
(12) $f(x)=2x+3,\ f:[1,-2]\to[-1,5]$

(13) $f(1)=f(3)=1 \Rightarrow a=0$ és $b=1 \Rightarrow f(4)=1\neq 5 \Rightarrow C\notin G_f$

(14) $2(-2)+b=4,\ 3a+5=3$

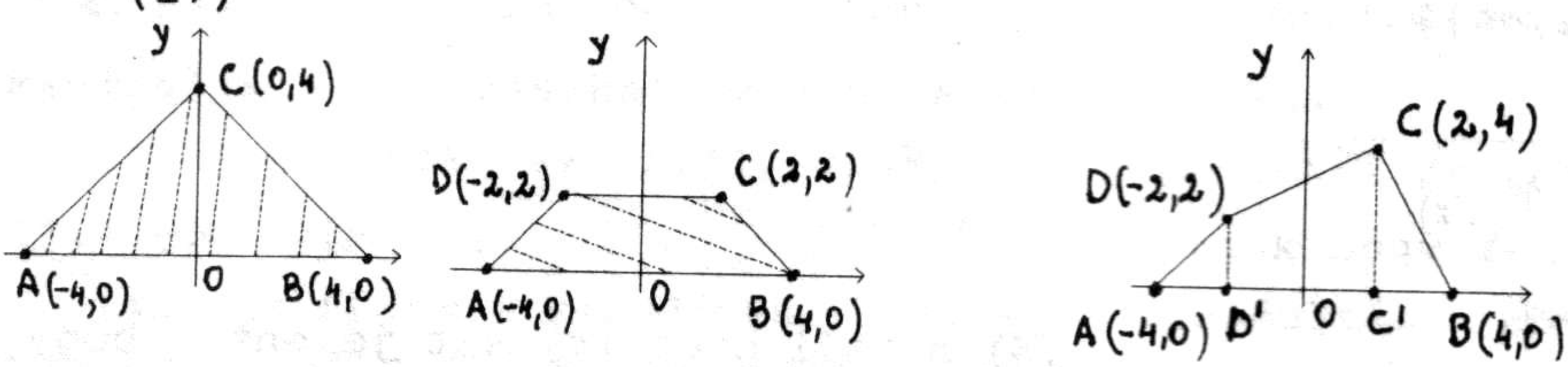
(15) $\begin{cases} -\frac{x}{2}+3=x \\ x\leq 2 \end{cases} \Rightarrow x=2$ vagy $\begin{cases} 3=3=x \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow x=3 \Rightarrow \begin{matrix} f(2)=2 \\ f(3)=3 \end{matrix}$

(16)



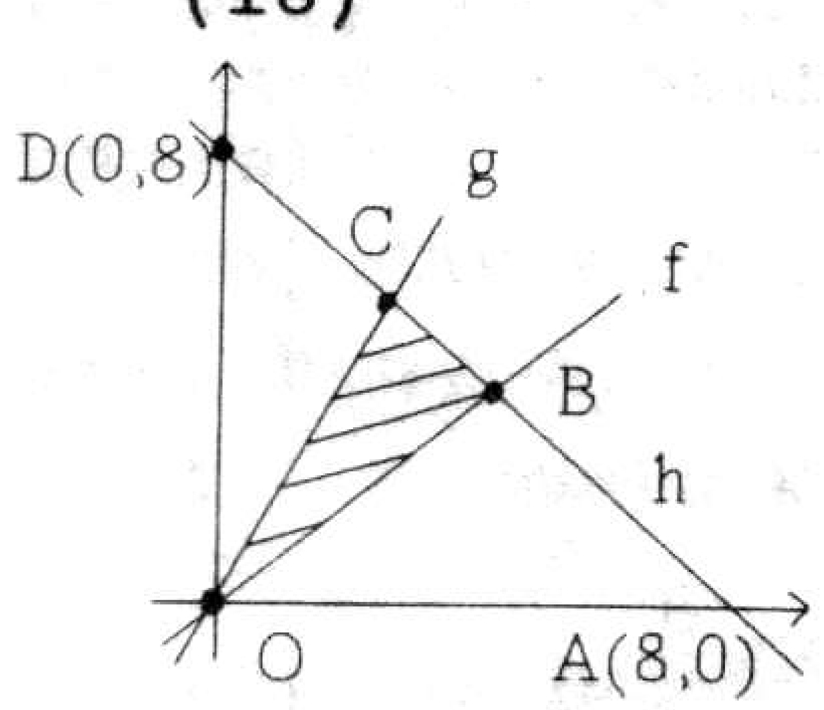
$$\left.\begin{matrix} OA=OB,\ BOA\sphericalangle=90° \Rightarrow OBA\sphericalangle=45° \Rightarrow CBD\sphericalangle=45° \\ OE=OD,\ DOE\sphericalangle=90° \Rightarrow ODE\sphericalangle=45° \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BCD\sphericalangle=90°$$

(17)



a) $T_{ABC}=\frac{8\cdot 4}{2}=16$; b) $T_{ABCD}=\frac{(8+4)\cdot 2}{2}=12$; c) $T_{ABCD}=T_{ADD'}+T_{DD'CC'}+T_{BCC'}=18$.

(18)



$OA=OD,\ OB\perp AD$

$T_{OAB}=\frac{1}{2}T_{OAD}=16$

$3x=-x+8 \Rightarrow C(2,6)$

$T_{OCA}=\frac{6\cdot 8}{2}=24$

$T_{OBC}=T_{OAC}-T_{OAB}=8$

(19) $\begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ x\geq 2 \end{cases}$ és $\begin{cases} -x-2\geq 0 \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow x\in(\infty,-2]\cup[-2,+\infty)$

(20) Legyen $f(x)=ax+b$, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=a\frac{x_1+x_2}{2}+b$, $f(x_1)=ax_1+b$, $f(x_2)=ax_2+b$, $f(x+2)=a(x+2)+b$, $f(x+1)=a(x+1)+b$ stb.

(21) $f(x)=ax+b,\ f(1-x)=a(1-x)+b \Rightarrow ax+b+a(1-x)+b=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=1-2b \Rightarrow f_b(x)=(1-2b)x+b,\ b\in\mathbb{R}$.

(22) $f(f(x))=a(ax+b)+b=ax+b+x \Rightarrow a^2=a+1$ és $ab=0 \Rightarrow b=0$ és $a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(23) $x=2 \Rightarrow f(1)=-2,\ x-1=t \Rightarrow f(t)=3(t+1)-8+2;$

$$\frac{1-6x}{2}=t \Rightarrow x=\frac{1-2x}{6} \Rightarrow g(t)=6\,\frac{1-2t}{6}+2=3-2t.$$

(24) Megoldva a $\begin{cases}2f(x+1)+g(x-1)=2x+14\\ f(x+1)-2g(x-1)=6x-18\end{cases}$ egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy $f(x+1)=2(x+1)$ vagyis $f(x)=2x$ és $g(x-1)=-2x+10=-2(x-1)+8$, azaz $g(x)=-2x+8$.

(25) Ha $x=2 \Rightarrow af(1)+bf(-2)=5$, ha $x=-1 \Rightarrow af(-2)+bf(1)=-1 \Rightarrow a=-\frac{5}{12},\ b=\frac{13}{12}$.

(26) x helyett $1-x$-et írva $\Rightarrow 2f(1-x)+3f(x)=1-x$, megoldva az egyenletrendszert, $f(x)=-x+0,6$.

(27) x helyett $-x$-et írunk: $2f(-x)+f(x)=\begin{cases}-x+3, & \text{ha } x<-1\\ x-3, & \text{ha } x\geq-1\end{cases}$ és az $x\in(-\infty,-1)$, $x\in[-1,1]$, $x\in(1,+\infty)$ esetekben az eredeti egyenlettel együtt megoldjuk $f(x)$-ben és $f(-x)$-ben.

(28) $f(0)=1;\ f(-x)=\frac{1+x}{1-x}$, ha $x\neq1$; $f(x+1)=-\frac{x}{x+2}$, ha $x\neq2$;

$f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1;\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x+1}$, ha $x\neq0$, és $x\neq-1$, $\frac{1}{f(x)}=\frac{1+x}{1-x}$, ha $x\neq1$.

(29) a) $x+\frac{1}{x}=y \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2 \Rightarrow f(y)=y^2-2;$

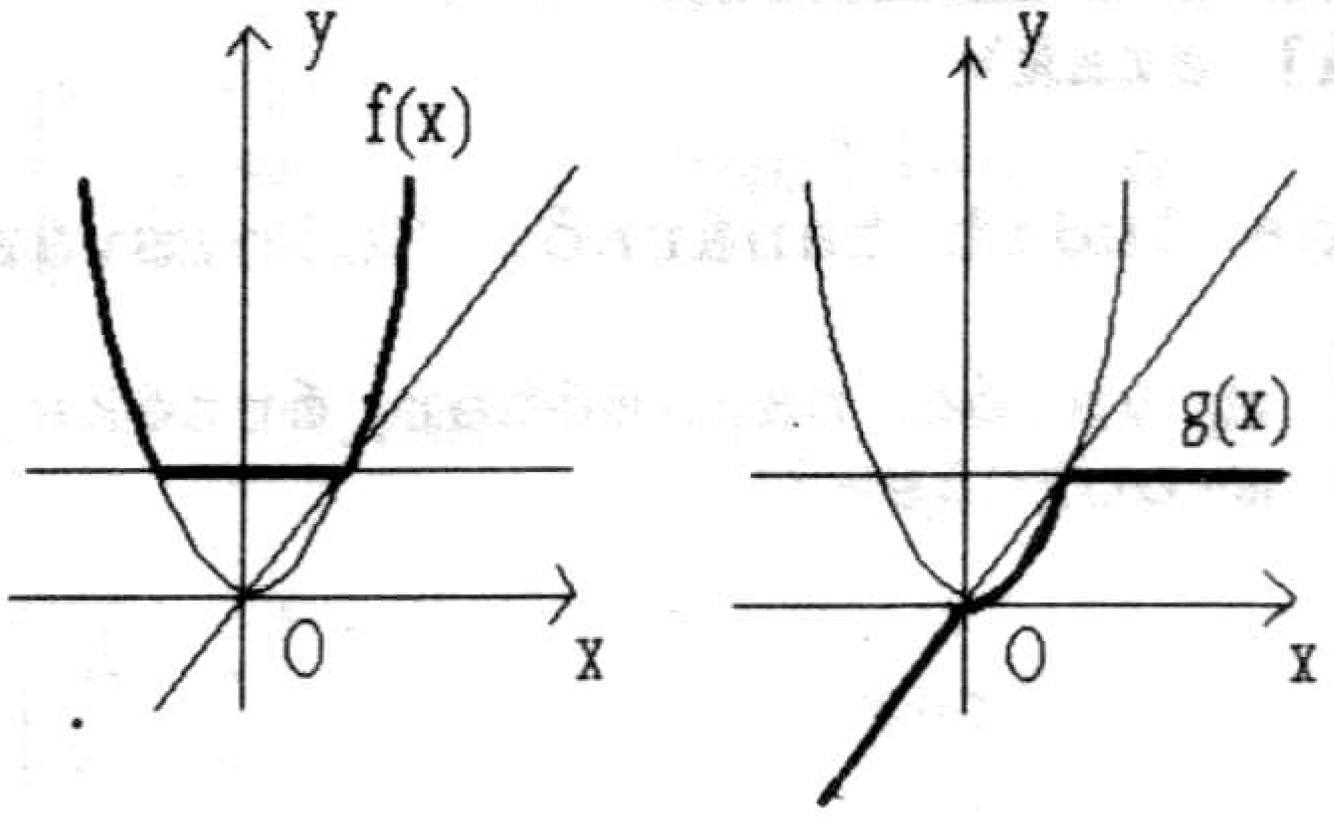
b) $\frac{1}{x}=y \Rightarrow x=\frac{1}{y} \Rightarrow f(y)=\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y},\ f:(0,+\infty)\to\mathbb{R};$

c) $\frac{x}{1+x}=y \Rightarrow x=\frac{y}{1-y} \Rightarrow f(y)=\left(\frac{y}{1-y}\right)^2,\ f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$.

(30) $g(x)=f(f(x))=\frac{x-1}{x},\ h(x)=g(f(x))=x \Rightarrow k(x)=h(f(x))=f(x)$.

(31) Ha $f(x)=ax^2+bx+c$, következik, hogy $f(x+3)=a(x+3)^2+b(x+3)+c$ stb.

(32) Legyen $f(t)=at^2+bt+c$, így $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2} \Leftrightarrow a(x-1)^2\geq0$ igaz, ha $a>0$ stb.



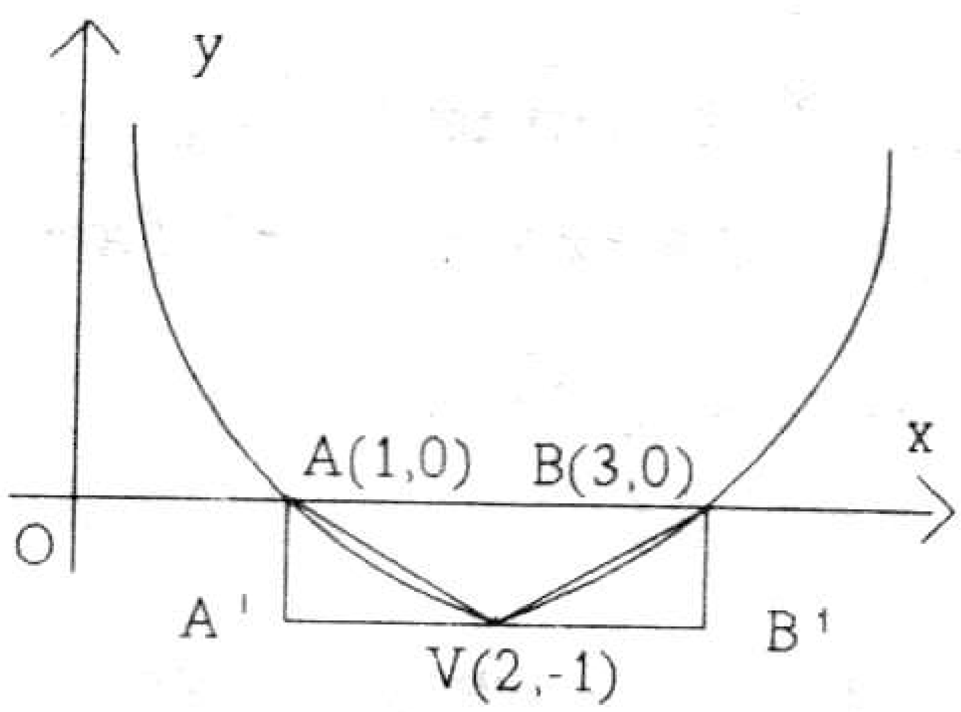
(33) Mind az f mind a g esetén ábrázoljuk mindhárom függvényt és a max, min jelentése alapján kitöröljük a nem megfelelő részt. A megfelelő részt vastag vonallal megerősítettük.

(34) $f(T+x)=f(x),\ (\forall)x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow T(T+2x-8)=0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$ abszurdum $f(T-x)=f(x),\ (\forall)x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2(8-T)x+T(T-8)=0,\ (\forall)x\in\mathbb{R} \Rightarrow T=8$.

(35) Ha $f(x)=ax^2+bx+c$, $f(x+1)=f(-x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a+b)\cdot(2x+1)=0, (\forall)\, x\in\mathbb{R}, \Rightarrow b=-a,\ f(x)=ax^2-ax+c.$

(36) Ha $m=2 \Rightarrow gr(f_m)=2$; nem létezik $m\in\mathbb{R}$ úgy, hogy $gr(f_m)=1$.

(37)



$T > T_{AVB\Delta}=1$
$T < T_{AA'B'B}=2$

(38) $2x^2-2x+2=x^2+2x-1 \Rightarrow x=1$ és $x=3$, $f\cap g=\{(1,2),(3,14)\}$.

(39) $\begin{cases} x^2+2x+2=y \\ y=mx+1 \end{cases} \Rightarrow x^2-(m-2)x+1=0$
$\Delta=m(m-4)$, a) $\Delta=0$, b) $\Delta>0$, c) $\Delta<0$.

(40) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$, ha $x\notin\{-1,-2\}$,
$g(x)=\dfrac{x(x-1)}{x(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$, ha $x\notin\{0,-2\}$, $A=B=\mathbb{R}-\{-2,-1,0\}$.

(41) $f(x)=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|$ stb.

(42) $f(f(x))=(x^2-4)^2-4 \Rightarrow f(x)=x^2-4$,
$g(g(x))=(x^2+2)^2+2 \Rightarrow g(x)=x^2+2$.

(43) a) $y<1$ esetén nem létezik b) igaz, $x=\sqrt{y-1}$
c) igaz, $x=-\sqrt{y-1}$.

(44) Nem, pl. $f(1)=f(2)=0$ és $1\neq 2$.

(45) Nem, pl. $f(0)=f(1)=1$ és $0\neq 1$.

(46) $x_1\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $x_2=2-x_1 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ és $x_1\neq x_2$,

(47) Nem, az $x_1\in\mathbb{R}$ és $x_2=m-1+x_1\neq x_1$ mellett teljesülhet $1-x_1=m-x_2$, $x_1<0$, $x_2>0$.

(48) $E=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $y=\dfrac{2x+1}{x-1} \Rightarrow x=\dfrac{y+1}{y-2} \Rightarrow F=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.