GYÖKMENNYISÉGEKKEL KAPCSOLATOS GYAKORIBB TÍPUSHIBÁK

Tuzson Zoltán tanár, Székelyudvarhely

A gyökmennyiségekkel végzett műveletek során -így az irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásakor is- számos hibalehetőség adódik. Vannak olyan hibák, amelyek bizonyos feladatok megoldása során a tanulóknál évről évre ismétlődnek (típushibák).

Célunk az -amint azt a címben is kihangsúlyoztuk- hogy felhívjuk a figyelmet olyan típushibákra vagy tévedési lehetőségekre, amelyek még a jobb tanulóknál is előfordulhatnak.

A leggyakoribb típuahibákat és hibalehetőségeket konkrét feladatok megoldásával mutatjuk be.

A dolgozat végén rendszerezzük a gyökmennyiségekkel kapcsolatos leggyakoribb típushibák elkerülésének módozatait, majd útmutatást adunk az irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek hibátlan megoldásához.

1. feladat *Legyen* $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ *és* $y = \sqrt{3} - 2$. *Igazoljuk, hogy* $x + y = 0$.

Sok esetben a tanulók a következőképpen "oldották" meg a feladatot:

$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 7 - 4\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3} + 3$, igaz (1).

Ilyenkor arra kérem a tanulókat, hogy hasonló módon "bizonyítsák" be az $x - y = 0$ egyenlőséget is, ahol x és y értéke az 1. feladatbeli:

$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{3} + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2 \Rightarrow 7 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 2)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 7 - 4\sqrt{3} = 3 - 4\sqrt{3} + 4$, igaz (2).

Amennyiben az (1) bizonyítás, úgy a (2) is az! De nézzük a történteket formálisan:

(1') $x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^2 = y^2$, illetve

(2') $x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow x^2 = y^2$.

Mindkét esetben igaz állításhoz jutottunk, de ez SEMMIT sem mond arról, hogy a bizonyítandó (feltételezett) összefüggés igaz, vagy hamis.

Ha azonban az (1') vagy (2') valamelyikében a " $\Rightarrow$ " jelt fordított irányban is kitehetjük, úgy már bizonyítást kapunk. Minthogy a $7 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 2)^2$ vagy akár a $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$ összefüggésből a $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$ összefüggés következik, ha az (1)-ben az utolsó egyenlőségből indulunk ki és a fordított utat követjük, egy tényleges bizonyítást kapunk.

Az 1. feladat legegyszerűbb bizonyítása az alábbi:

$x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 - 2\cdot 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| =$
$= 2 - \sqrt{3} = -y \Rightarrow x + y = 0$.

2. feladat *Hozzuk legegyszerűbb alakra az*
$E = \sqrt[6]{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$ *kifejezést!*

Megoldásként a következő két változatot vizsgáljuk:

a) $E = \sqrt[6]{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} = \sqrt[6]{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{(1 - \sqrt{2})^2} =$

$= \sqrt[6]{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} = \sqrt[6]{1} = 1;$

b) $E = \sqrt[6]{1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2} \cdot \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} = \sqrt[6]{(1 + \sqrt{2})^2} \cdot \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} =$

$= \sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \sqrt[3]{-1} = -1.$

Melyik a helyes eredmény? Hol a hiba? Amennyiben észrevesszük, hogy $1 - \sqrt{2} < 0$ és így $\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} < 0$, következik, hogy b)-ben nincs hiba ($E< 0$). Ugyanakkor az a)-beli $\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} = \sqrt[6]{(1 - \sqrt{2})^2}$ egyenlőség hibás, hiszen bal oldala negatív, míg jobb oldala pozitív (negatív számot vittünk be páros rendű gyökjel alá). Ha a $\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} = -\sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} = -\sqrt[6]{(\sqrt{2} - 1)^2}$ helyes átalakítást végezzük, úgy az a)-ból is megkapjuk az $E = -1$ eredményt.

3. feladat *Hozzuk a legegyszerűbb alakra az* $F = \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$ *kifejezést.*

Megoldásként itt is két változatot vizsgálunk:

a) $F = \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{(1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 + 2\sqrt{2}} =$

$= \sqrt[6]{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} = \sqrt[6]{1} = 1;$ illetve

b) $F = \sqrt[6]{1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} = \sqrt[6]{(1 - \sqrt{2})^2} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} =$

$= \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} = \sqrt[3]{-1} = -1.$

Melyik eredmény helyes, és hol a hiba? Könnyen belátható, hogy ezúttal az a) megoldás a helyes, hiszen $1 + \sqrt{2} > 0$. De mivel $1 - \sqrt{2} < 0$, ezért $\sqrt[6]{(1 - \sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{|1 - \sqrt{2}|} = \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$ s a b) alatti "megoldás" javításra szorul.

4. feladat *Bizonyítsuk be, hogy* $2 \times 2 = 5$.

"Bizonyítás". Rendre a következőket írhatjuk: $16 - 36 = 25 - 45 \Rightarrow 16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4} \Rightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow 4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow 4 = 5$, vagyis $2 \times 2 = 5$. Hogyan lehet ez?

Elég észrevenni, hogy $\frac{9}{2} = 4{,}5$ így $4 - \frac{9}{2} < 0$, míg $5 - \frac{9}{2} > 0$; a helyes következtetés tehát az, hogy $\left|4 - \frac{9}{2}\right| = \left|5 - \frac{9}{2}\right| \Leftrightarrow \frac{9}{2} - 4 = 5 - \frac{9}{2}$, és ez már nem vezet ellentmondáshoz.

5. feladat *Bizonyítsuk be, hogy bármely két szám egyenlő!*

"Bizonyítás". Legyen x, y két egymástól különböző valós szám és $a = \frac{x + y}{2}$. Így $x + y = 2a \Rightarrow (x + y)(x - y) = 2a(x - y) \Rightarrow x^2 - y^2 = 2ax - 2ay \Rightarrow x^2 - 2ax = y^2 - 2ay \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 = y^2 - 2ay + a^2 \Rightarrow (x - a)^2 = (y - a)^2 \Rightarrow x - a = y - a \Rightarrow x = y$. Hogyan lehet?

A hiba az előbbivel azonos: $(x - a)^2 = (y - a)^2 \Rightarrow |x - a| = |y - a|$, de $x - a = y - a$ nem következik be, mert $x \neq y$ és $x - a$ valamint $y - a$ ellenkező előjelűek (hiszen $x + y = 2a \Leftrightarrow x - a = a - y$).

6. feladat *Tekintsük a*

$$\sqrt{2a^2} + \sqrt{2b^2} + \sqrt{2c^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2c^2} \quad (*)$$

összefüggést.

Igazoljuk, hogy a következő három állítás közül pontosan az egyik egyenértékű a (*) összefüggéssel. Melyik az?

(i) $a = b = c = 0$;

(ii) $ab + bc + ca = 0$;

(iii) $a = b = 0$ és $c \neq 0$ (vagy cirkuláris permutációja).

"Megoldás"

(1) Ha (i) vagy (iii) teljesül, akkor evidens, hogy (*) teljesül.

(2) Ha (ii) teljesül, vagyis $ab + bc + ca = 0$, akkor

$(a + b + c)\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2(a + b + c)^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}$ (α) és

$(a + b + c)\cdot\sqrt{2} = a\sqrt{2} + b\sqrt{2} + c\sqrt{2} = \sqrt{2a^2} + \sqrt{2b^2} + \sqrt{2c^2}$ (β).

Az (α) és (β) alapján a (*) következik.

(3) Ha a (*) teljesül, négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4(ab + bc + ca) = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2,$$

ahonnan $ab + bc + ca = 0$.

Tehát a (*) összefüggés az (ii)-vel egyenértékű. Valóban?

Helyes megoldás. A (2) és (3) gondolatmenet helytelen. Mivel $ab + bc + ca = 0$, az a, b, c számok között van negatív is. Amennyiben $a + b + c \geq 0$, úgy az (α) helyes, de a (β) nem, mert négyzetgyök alá negatív mennyiség nem vihető be. A (3) gondolatmenetben $|ab| + |bc| + |ca|$ szükséges az $ab + bc + ca$ helyett, ahogyan ez az alábbiakból is kiderül:

$(*) \Leftrightarrow |a| + |b| + |c| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(|ab| + |bc| + |ca|) = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow |ab| + |bc| + |ca| = 0 \Leftrightarrow |ab| = |bc| = |ca| = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Leftrightarrow$ (i).

Tehát a (*) összefüggés az (i)-vel egyenértékű.

A továbbiakban olyan irracionális egyenleteket és egyenlőtlenségeket oldunk meg, amelyekben négyzetgyökvonás szerepel. Az x változóra vonatkozó megoldáshalmazt M_x-el jelöljük; a megoldást az R-en végezzük.

7. feladat *Oldjuk meg az* $x\cdot\sqrt{x^2 + 1} = x$ *egyenletet!*

"Megoldás". Az egyenlet mindkét oldalát elosztva x-szel, azt kapjuk, hogy $\sqrt{x^2 + 1} = 1$, ahonnan négyzetre emeléssel $x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$. Mivel $0\cdot\sqrt{0^2 + 1} = 0$, $M_x = \{0\}$. Hol a hiba?

8. feladat *Oldjuk meg az* $x\cdot\sqrt{x^2 + 2} = x$ *egyenletet!*

"Megoldás". Az egyenlet mindkét oldalát végigosztva x-szel, azt kapjuk, hogy $\sqrt{x^2 + 2} = 1$, ahonnan $x^2 + 2 = 1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow M_x = \emptyset$. Hol a hiba?

9. feladat *Oldjuk meg az* $x\cdot\sqrt{x^2 - 1} = x$ *egyenletet!*

"Megoldás". $x\cdot\sqrt{x^2 - 1} = x \Rightarrow x\cdot\sqrt{x^2 - 1} - x = 0 \Rightarrow x(\sqrt{x^2 - 1} - 1) = 0$, ahonnan $x_1 = 0$, illetve $\sqrt{x^2 - 1} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$. Tehát $M_x = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. Hol a hiba?

Most mindhárom kérdésre választ adunk:

- A 7. és 8. feladatnál nem szabad x-szel végigosztani, mert akkor elveszítjük az $x = 0$ gyököt.
- Végzetes hiba mindhárom feladatnál, hogy nem állapítottuk

meg az ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNYT. Ezt a továbbiakban D_x-szel jelöljük.

- A 7. és 8. feladatoknál $D_x = \mathbf{R}$. A 9. feladat esetében $x^2 - 1 \geq 0$ kell legyen, ahonnan $D_x = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$, és így $x_1 = 0 \notin D_x$; továbbá $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$-re még a próba elvégzése is szükséges, mert a négyzetre emeléskor idegen gyökök is bekerülhettek. (Erre még bővebben kitérünk). A 7. és 8. feladat helyes megoldásához vegyük mintául a 9. feladat kijavított megoldását.

10. feladat *Oldjuk meg a $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1$ egyenletet!*

Az értelmezési tartomány: $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 + x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D_x = [-1,1]$.

Két gondolatmenetet vizsgálunk:

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1 \Rightarrow \sqrt{1-x} = 1 - \sqrt{1+x} \Rightarrow 1 - x = 1 - 2\sqrt{1+x} + 1 + x \Rightarrow 2\sqrt{1+x} = 2x + 1 \Rightarrow 4x^2 = 3 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tehát $M_x = \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

b) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1 \Rightarrow 1 - x + 2\sqrt{1-x^2} + 1 + x = 1 \Rightarrow 1 + 2\sqrt{1-x^2} = 0 \Rightarrow M_x = \emptyset$, mivel az egyenlőség bal oldala pozitív.

Hol a hiba?

11. feladat *Oldjuk meg a $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} < 1$ egyenlőtlenséget!*

Az előzőkhöz hasonlóan két eljárást közlünk. $D_x = [-1,1]$.

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} < 1 \Rightarrow \sqrt{1-x} < 1 - \sqrt{1+x} \Rightarrow 1 - x < 1 - 2\sqrt{1+x} + 1 + x \Rightarrow 2\sqrt{1+x} < 2x + 1 \Rightarrow 3 < 4x^2 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$. De $D_x = [-1,1]$, így $M_x = \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

b) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} < 1 \Rightarrow 1 - x + 2\sqrt{1-x^2} + 1 + x < 1 \Rightarrow 1 + 2\sqrt{1-x^2} < 0 \Rightarrow M_x = \emptyset$.

Melyik eredmény helyes? Hol a hiba?

12. feladat *Oldjuk meg a $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} > 1$ egyenlőtlenséget!*

$D_x = [-1,1]$.

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} > 1 \Rightarrow \sqrt{1-x} > 1 - \sqrt{1+x} \Rightarrow 1 - x > 1 - 2\sqrt{1+x} + 1 + x \Rightarrow 2\sqrt{1+x} > 1 + 2x \Rightarrow 4 + 4x > 1 + 4x + 4x^2 \Rightarrow 3 > 4x^2 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \subset D_x$, tehát megfelel, s $M_x = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} > 1 \Rightarrow 1 - x + 2\sqrt{1-x^2} + 1 + x > 1 \Rightarrow 1 + 2\sqrt{1-x^2} > 0$, ami bármely $x \in D_x = [-1,1]$ esetén teljesül. Tehát $M_x = [-1,1]$.

Melyik megoldás helyes? Hol a hiba?

Helyes megoldások:

- A 10. feladat b) megoldása helyes. Az a) megoldásnál

idegen gyökök kerültek be: $\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+$
$+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}})=\frac{1}{2}(\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+$
$+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2})=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1)=\sqrt{3}\neq 1$. Próbával "kiszűrhető" az idegen gyök, s akkor az a) megoldás is helyes eredményre vezet. Az idegen gyökök leggyakrabban páros hatványra emeléskor jönnek be, főleg ha az egyenlőség két oldalán ellentétes előjelű kifejezések vannak. Így a 10. feladat a) megoldásánál négyzetre emelés előtt az $1-\sqrt{1+x}\geq 0$, illetve $2x+1\geq 0$ megszorításokat kellett volna tenni. Ezek D_x-el összhangban az $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ megszorítást jelentik és $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\notin\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

– A 11. feladatnál a b) megoldás helyes. Az a) pontnál ugyancsak az $1-\sqrt{1+x}\geq 0$ és $2x+1\geq 0$ megszorítások hiányoznak. Négyzetre emeléskor -e kikötések hiányában- idegen megoldáshalmaz került be, amit *nem tudunk próbával kiszűrni*, mint az egyenletek esetében. A megszorítások valamint az a)-beli M_x halmaz figyelembevételével az $M_x=\emptyset$ eredményhez jutunk.

– A 12. feladatnál is a b) megoldás a helyes. Az a)-ban megoldáshalmazt veszítettünk el, ugyancsak a négyzetre emelés miatt. Ugyanis a kapott $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ halmazt egyesítenünk kell azokkal az x értékekkel, amelyekre $1-\sqrt{1+x}<0$ (hiszen ezekre $\sqrt{1-x}>1-\sqrt{1+x}$ teljesül) továbbá az $1+2x<0$ megoldásaival (minthogy ezekre $1+2x<2\sqrt{1+x}$ teljesül). Az egyesítés után pontosan az $M_x=D_x=[-1,1]$ lesz az eredmény.

A megszorításokat nem csak feladatmegoldás közben, hanem minden négyzetre emelés előtt -tehát induláskor is- figyelembe kell venni. Például a $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\geq 1$, illetve $\sqrt{x-1}-$ $-\sqrt{x+1}<1$ feladatoknál $D_x=[1,+\infty)$. Ha nem vesszük figyelembe, hogy $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}<0$, bármely $x\in D_x$ esetén, úgy négyzetre emeléssel első esetben idegen megoldásokat hozunk be, a második esetben pedig megoldásokat veszítünk el. Első esetben $M_x=\emptyset$, második esetben $M_x=D_x=[1,+\infty)$.

A továbbiakban a VIII.-os algebra tankönyv 133. oldalának 10. feladatára mutatunk be három "megoldást", amelyek ugyanarra az eredményre vezetnek:

13. feladat *Oldjuk meg a* $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2-x-2}=0$ *egyenletet!*

"Megoldások": $\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ x^2-x-2\geq 0 \end{cases}\rightarrow D_x=(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$.

a) $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2-x-2}=0\rightarrow\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{(x+1)(x-2)}=$ $=0\rightarrow\sqrt{x-2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})=0$; innen $\sqrt{x-2}=0\rightarrow x=2$ vagy $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0\rightarrow(\sqrt{x})^2=(-\sqrt{x+1})^2\rightarrow x=x+1\rightarrow 0=1$. Tehát

$M_x = \{2\}$.

b) $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 0 \rightarrow (\sqrt{x^2 - 2x})^2 = (-\sqrt{x^2 - x - 2})^2 \rightarrow$ $\rightarrow x^2 - 2x = x^2 - x - 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow M_x = \{2\}$.

c) $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x} = -\sqrt{x^2 - x - 2}$. Mivel $\sqrt{x^2 - 2x} \geq 0$ és $-\sqrt{x^2 - x - 2} \leq 0$, így (nem is szükséges az előbbi négyzetre emelés!) feltétlen $\sqrt{x^2 - 2x} = -\sqrt{x^2 - x - 2} = 0$, ahonnan $x = 2$ az egyetlen megoldás. Van-e hiba valamelyik megoldásban?

A c) megoldás helyes. A b) esetében, mivel négyzetre emeltünk "idegen" gyök is bejöhetett volna. Próba elvégzése esetén b) nem helytelen. Az a) megoldás -annak ellenére, hogy végeredménye ugyanaz- teljesen hibás! A $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ képlet csakis akkor igaz, ha a, $b \geq 0$! Ugyanis a kapott $\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = 0$ egyenlet D_x értelmezési tartománya más, mint az eredeti $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$ egyenleté: $x - 2 \geq 0$, $x \geq 0$, $x + 1 \geq 0$ miatt $D_x = [2,+\infty)$. Így pl. a $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - x - 2} > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M_x = D_x = (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$, míg a $\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) > 0$ megoldáshalmaza $M_x = D'_x = (2,+\infty)$.

Az előbbi hibához kapcsolódik tanulóim alábbi kérdése: Az "i" szám az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet egyik megoldása, azaz $i^2 = -1$. Másfelől $i = \sqrt{-1}$, így $i \cdot i = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$. Hogyan lehet ez? Úgy, hogy a $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ képlet értelmét veszíti (nem helyes), ha a, b negatív számok.

Támpontok a dolgozatban is bemutatott gyakoribb típushibák elkerülésére.

1) Logikai hiba ha -bizonyítás gyanánt- a bizonyítandó állításból indulunk ki, és helyes implikációkkal haladva, igaz állításhoz jutunk. Ilyenkor semmit sem mondhatunk feltevésünk, azaz a bizonyítandó állítás igaz voltáról. Tehát ez nem bizonyítás; ez ún. parciális analízis, a reduktív eljárások egyike (eredmények megsejtésére irányuló tevékenység). Amennyiben az implikációk megfordíthatók, úgy "hátulról" elindulva egy ún. szintetikus bizonyítást adhatunk.

2) Adott egyenlet esetében az egyenlet mindkét oldalát nem oszthatjuk végig ismeretlent tartalmazó kifejezéssel (gyököket veszíthetünk el).

3) Irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek esetében a megoldás első lépése az értelmezési tartomány meghatározása; egyenleteknél a kapott "gyökök" próbáját is elvégezzük.

4) Az $a^m = b^m \rightarrow a = b$ implikáció csak páratlan m esetén érvényes. Így $a^2 = b^2 \rightarrow a = \pm b$ (vagyis $|a| = |b|$). Tehát az $\sqrt[m]{a^m} = a$ is csak páratlan m-re igaz, míg párosra $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$. Úgyszintén $\sqrt[2k]{a^2} = \sqrt[k]{|a|}$ még akkor is, ha k páratlan.

5) Az $a = b \rightarrow a^m = b^m$ állítás ugyan bármely m természetes számra igaz, de irracionális egyenletek megoldásánál, ha m páros szám -idegen gyökök elkerülése végett- csak azonos előjelű a, b esetén használjuk! Tehát megszorításokat kell tennünk a változóra.

6) Az $a < b \rightarrow a^m < b^m$ (vagy $a > b \rightarrow a^m < b^m$) képletnél is,

ha m páros, szükséges az a, $b > 0$ kitétel, hiányában hibát követünk el.

7) Az $a^m < b^m \rightarrow a < b$ (vagy $a^m < b^m \rightarrow a > b$) páros m esetén helytelen. Helyesen: $a^{2k} < b^{2k} \rightarrow |a| < |b|$.

8) Az $a \cdot \sqrt[2k]{b} = \sqrt[2k]{a^{2k} \cdot b}$ képlet csak $a \geq 0$ esetén igaz! Ha a negatív, akkor a negatív előjelet "kinn" kell hagynunk: $a \cdot \sqrt[2k]{b} = -\sqrt[2k]{a^{2k} \cdot b}$.

9) A $\sqrt[2k]{a} \cdot \sqrt[2k]{b} = \sqrt[2k]{a \cdot b}$ képlet csak $a, b \geq 0$ esetén igaz. Hasonlóan a $\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{a}}{\sqrt[2k]{b}}$ $(b \neq 0)$ képlet is!

Az irracionális egyenletek megoldásánál

1) Állapítsuk meg a D_x értelmezési tartományt. (A páros rendű gyökmennyiségek csak nemnegatív számokra értelmezettek; ez páratlan rendű gyökmennyiségekre nem vonatkozik).

2) A gyökmennyiségeknek különböző átalakításokkal történő eltávolításakor tegyünk megszorításokat, kikötéseket a változóra úgy, hogy az egyenlet két oldala azonos előjelű legyen.

3) A következő két szempont figyelembevételével, ellenőrizzük a kapott megoldást:

a) $x \in D_x \cap K_x$, ahol K_x az x változóra tett kikötések metszete;

b) kielégíti-e x az adott egyenletet?

Az irracionális egyenlőtlenségek megoldása

1) A D_x értelmezési tartomány megállapítása.

2) Az $E(x) < F(x)$ esetekben (induláskor, illetve menet közben) hasznos lehet figyelembe venni az alábbiakat:

a) amikor $E(x) > 0$, akkor $F(x) > 0$ kell legyen. Ennek alapján tegyünk kikötést az x-re.

b) mindazon $x \in D_x$ megoldás, amelyekre $F(x) > 0$ és $E(x) \leq 0$. Vigyázzunk, ne hagyjunk el megoldásokat!

c) ha $E(x) > 0$ és $F(x) \leq 0$, akkor $x \notin M_x$.

Az $E(x) < F(x) \rightarrow E^2(x) < F^2(x)$ következtetést csak az $E(x) \geq 0$ és $F(x) \geq 0$ kikötések mellett alkalmazhatjuk (különöben idegen megoldások kerülhetnek be vagy megoldásokat veszíthetünk el). Azon $x \in D_x$ értékekre pedig, amlyek az említett kikötéseket nem teljesítik (az $E(x) < F(x)$ egyenlőtlenség -1-gyel való beszorzása után sem), b) illetve c) szerint gondolkodunk.

3) Megoldásnak csak olyan értéket fogadhatunk el, amely szerepel a $D_x \cap A_x$ halmazban, ahol A_x az a) szerint tett kikötéseket leíró halmazok metszete.

Ellenőrizzük, hogy $B_x \subset M_x \subset D_x \cap A_x$, ahol B_x a b) alapján kapott megoldások halmaza.

Azzal a reménnyel zárjuk a dolgozatot, hogy a felleltározott típushibák tudatosítása nagymértékben hozzájárulhat ezeknek az elkerüléséhez, kiküszöböléséhez.