

Gyors fejszámolási tippek, trükkök és ötletek (I. rész)

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A fejszámolás szó szerint értendő fogalom, jelentése fejben számolni, semmilyen segédeszköz, papír és ceruza vagy számológép nélkül. A fejszámolás nem veleszületett képesség, hanem mindenki képes rá, bárki által elsajátítható, megtanulható képesség. Mindenki képes határok nélkül fejleszteni a memóriáját, logikáját és matematikai készségét, gyors számolási képességeit. Egy idő után a sok gyakorlás miatt az ember képes lesz rá érezni egyre gyorsabban a matematikai műveletek könnyebb útjára, így egyre gyorsabban és könnyebben jut majd el majd a végeredményhez is.

A számológépek, de kiváltképpen az okos telefonok megjelenése és elterjedése által a fejszámolás egyre inkább háttérbe szorult, mert sokan már az egyszerű számolásokat is ezekkel az eszközökkel végzik. Ezért nem alakulnak ki a gyors számolási képességek, készségek vagy algoritmusok, mert a számolásokat a matematika amolyan mellékes mozzanatának tekintik. Mindez kihatással van a további gondolkodási, logikai műveletek háttérbe szorulásával és egyre inkább rosszabbul mennek a fejben végzett számolások, és egy bűvös kör alakul ki. Sajnálatos módon gyakran oda kerülnek a tanulóink, hogy a legmagasabb szintű fejszámolást maga a szorzótábla képezi és már egyszerűen fejben is elvégezhető számolásokhoz is okos telefont ragadnak. Bizonyára nem is sejtik, hogy a fejszámolások mellőzése által, milyen nagyszerű gondolkodási élményekről maradnak le. Nem beszélve arról, hogy mindez mennyire visszafejleszti a számolási és így a matematika tanulási képességeiket is.

Jelen dolgozat célja az, hogy bemutassunk számos olyan fejszámolási eljárást, amelyek bárki által könnyen megérthetők és elvégezhetők, és ezek elsajátítása nagyon nagymértékben befolyásolják a fejben végezhető számolások könnyedségét. A bemutatott fejszámolási tippek, trükkök és ötletek csupán a négy alapműveletre és a hatványozásra korlátozódnak, így nincs szükség semmilyen magas fokú ismeretre, csupán a bemutatott módszerek kitartó gyakorlására van szükség. Mindenképpen megjegyezzük, hogy a bemutatásra kerülő anyag semmilyen téren nem törekszik teljességre, hiszen ez lehetetlen, csupán csak támpontokat nyújt a gyors fejszámolási módszerek és képességek elsajátítása és ápolása terén. A kíváncsi Olvasó mindezekről még többet megtudhat az [1]-ből.

Mindenek előtt tanulságos lenne megemlítenünk Carl Friedrich Gauss (1777- 1855) gyerekkorából egyik fejszámolási trükkjét, amivel az $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$ összeget számította ki fejben. Először elképzelte fejben az összeget és melléje „leírta” az összeget fordított sorrendben is így:
 $2S = (1 + 2 + 3 + \dots + 100) + (100 + 99 + \dots + 2 + 1)$ amit most kettesével csoportosított így:
 $2S = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (99 + 2) + (100 + 1)$ és belátta, hogy minden csoport összege éppen 101, és mivel 100 csoport van, ezért $2S = 100 \times 101$ ahonnan $2S = 100 \times 101 / 2 = 5050$. Ezzel fejszámolási trükkel ámulatba ejtette a tanítóját is, és ezt az összegezési módszert amit a számtani sorozatoknál használunk, gyakran nevezik ezt Gauss-féle összegezési módszernek, illetve az összeget, Gauss-féle összegnek.

A továbbiakban térjünk rá néhány gyors fejszámolási eljárás bemutatására.

1. Összegek és különbségek kiszámolása tagok felcserélésével és csoportosításával

Pl. Számítsuk ki az $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 95 + 97 + 99$ összeget. A kiszámolásra most is a Gauss módszert alkalmazzuk, miszerint: $2S = (1+99) + (3+97) + \dots + (97+3) + (99+1) = 100 + 100 + \dots + 100 + 100$ ahol az összegnek éppen 50 tagja van, ezért $2S = 50 \times 100$ ahonnan $S = 50^2$. Nézzünk most egy másik példát:

Pl. Számítsuk ki az $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots + 1999 - 2000 + 2001$ összeget. Egy kis gondolkodás után belátható, hogy végezzük el fejben a következő sorrendcseréket és csoportosításokat:

$S = 1 + (3 - 2) + (5 - 4) + \dots + (2001 - 2000) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$ ahol az összegnek éppen 1001 tagja van, ezért $S = 1001$. Ahhoz, hogy fejben könnyűszerrel végezhesünk el ilyenfajta összegezési számolásokat, célszerű gyakorolni a fejszámolást. Ebből a célból lássunk néhány feladatot:

- (a) $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 100$ (b) $S = 3 + 6 + 9 + \dots + 300$ (c) $S = 4 + 7 + 9 + \dots + 301$
(d) $S = 99 - 97 + 95 - 93 + \dots - 5 + 3 - 1$ (e) $S = 5 - 10 + 15 - 20 + \dots + 1995 - 200 + 2005$.
(f) $S = 5 + 20 + 35 + 50 + 65 + 80$ (g) $S = 80 - 65 + 50 - 35 + 20 - 5$

A továbbiakban nézzünk néhány rövidke kis összegszámolást:

Pl. Számítsuk ki az $S = 3 + 137 + 444 + 873 + 556 + 997$ összeget. Az ilyenfajta számolásoknál ha balról jobbra sorrendben végezzük el az összeadásokat, a műveletvégzéseket nagyon lelassíthatják az egységrend átlépések. Ahhoz, hogy fejben gyorsan elvégezhessük, célszerű olyan sorrendcserékre és csoportosításokra gondolni, hogy kerek tízeseket kapjunk, amiket fejben könnyű összeadni. Ezért így gondolkodhatunk: $S = (3 + 997) + (137 + 873) + (444 + 556) = 1000 + 1000 + 1000 = 3000$.

Gyakorold az eljárást: (a) $15 + 27 + 5 + 43 = ?$ (b) $16 + 33 + 37 + 14 = ?$ (c) $17 + 84 + 33 + 16 = ?$

(d) $3 + 15 + 47 + 35 + 50 = ?$ (e) $121 + 35 + 100 + 29 + 115$ (f) $1993 + 1848 + 7 + 52 + 2015 = ?$

2. Kéttagú összegek kiszámolása fejben

Az iskolában legtöbbször úgy tanultuk, hogy az összeadást úgy könnyű elvégezni, hogy a számokat a megfelelő egységrendek szerint egymás alá írtuk, és ezután jobbról balra kezdjük el az összeadást, a megfelelő egységrendenként. Nos, a fejszámolások során nem is szükséges egymás alá „írni” sőt, az összeadást nem jobbról balra végezzük, hanem balról jobbra, mégpedig olyan felbontás szerint, ahogyan a számokat kiolvassuk. Nézzünk néhány példát:

Pl. $47 + 32 = ?$ A továbbiakban is értékesíthető könnyed számolás céljából így gondolkodunk: a 47-et úgy olvassuk ki, hogy **negyvenhét**, a 32-öt pedig **harminckettő**. Ezért adjuk előbb össze a 40-et és a 30-at, aztán a „hátramaradt” 7-et és 2-öt, tehát fejben ezt láthatjuk: $47 + 32 = (40 + 30) + (7 + 2) = 70 + 9 = 79$. Természetesen most könnyű dolgunk volt, mert nem volt egységrend átlépés. De akkor sincs nehezebb dolgunk, ha az egyeseknél van egységrend átlépés is. Nézzünk egy ilyen példát:

Pl. $67 + 28 = ?$ Itt is az előbbihez hasonlóan járunk el: $67 + 28 = (60 + 20) + (7 + 8) = 80 + 15 = 95$. Az ilyenfajta összeadás akkor sem kell nehézséget jelentsen, amikor a tízeseknél is van egységrend átlépés:

Pl. $87 + 69 = ?$ Itt is az előbbihez hasonlóan járunk el: $87 + 69 = (80 + 60) + (7 + 9) = 140 + 16 = 156$.

Ahhoz, hogy a továbbiakban könnyen és gyorsan adjunk össze többjegyű számokat is fejben, célszerű gyakorolni ezeket a kis összeadásokat:

- | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (a) 23+16 | (b) 64+43 | (c) 95+32 | (d) 34+26 | (e) 89+78 | (f) 73+58 |
| (g) 47+36 | (h) 19+17 | (i) 55+49 | (j) 39+38 | (k) 78+89 | (l) 67+98 |

A továbbiakban nézzünk néhány háromjegyű szám összeadást:

Pl. $538 + 327 = ?$ Itt is „írjuk” fel a számokat ahogyan kiolvassuk: $538 = 500 + 30 + 8$ illetve $327 = 300 + 20 + 7$ és most ahogyan megállapodjunk, balról jobbra adjuk össze a megfelelő „egységeket” és fejben ezt „látjuk”: $538 + 327 = (500 + 300) + (30 + 20) + (8 + 7) = 800 + 50 + 15 = 850 + 15 = 865$

Most is azért volt könnyű dolgunk, mert csak egyetlen egységrend átlépés volt. De belátjuk, hogy több egységrend átlépés esetén is legfeljebb csak annyira nehéz a műveletvégzés, mint a kétjegyű számoknál, egységrend átlépés esetén. Nézzünk ilyen példát is:

Pl. $858 + 634 = ?$ Itt is az előbbihez hasonlóan járunk el: $858 + 634 = (800 + 600) + (50 + 30) + (3 + 4) = 1400 + 80 + 7 = 1400 + 87 = 1487$. Ahhoz, hogy fejben jobban menjen az ilyenfajta számolás, gyakoroljuk:

- | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------|
| (a) 242+137 | (b) 312+256 | (c) 635+814 | (d) 457+241 | (e) 912+475 | (f) 852+378 |
| (g) 457+269 | (h) 878+797 | (i) 276+689 | (j) 877+539 | (k) 5400+252 | |
| (l) 1800+855 | (m) 6120+136 | (n) 7830+348 | (o) 4240+371 | (p) 4560+171 | |

3. Számok különbsége balról jobbra végezve

A fejszámolások esetén a kivonást is balról jobbra könnyebb fejben elvégezni, nézzük csak:

Pl. $86 - 25 = ?$ Itt is bontunk: $86 - 25 = (80 + 6) - (20 + 5) = (80 - 20) + (6 - 5) = 60 + 1 = 61$. Nyilván nem volt nehéz dolgunk, mert nem volt egységrend átlépés. Nézzünk most olyan kivonást, ahol van egységrend átlépés

Pl. $86 - 29 = ?$ Itt is elvégezzük a következő bontásokat: $86 - 29 = (80 + 6) - (20 + 9)$. Most két féle képpen is okoskodhatunk, az egyik az előző gondolatmenetre épül: $86 - 29 = (86 - 20) - 9 = 66 - 9 = 57$. A második módszer: $86 - 29 = 86 - 30 + 1 = 56 + 1 = 57$. Ez utóbbit az ú.n. kerekítési módszernél részletesebben is megismerhetjük. A gyorsabb számolás érdekében gyakoroljunk egy keveset:

- | | | | | | |
|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| (a) 38-23 | (b) 84-59 | (c) 92-34 | (d) 67-48 | (e) 79-29 | (f) 63-46 |
| (g) 51-27 | (h) 89-48 | (i) 125-79 | (j) 148-86 | (k) 135-77 | (l) 254-65 |

A következőkben nézzünk háromjegyű számok kivonását is.

Pl. $958 - 417 = ?$ Gondolkozzunk így:

$958 - 417 = 958 - (400 + 10 + 7) = (958 - 400) - 17 = 558 - (10 + 7) = 548 - 7 = 541$. Nézzünk most egy olyan példát is, ahol van egységrend átlépés is:

Pl. $747 - 598 = ?$ Gondolkozzunk így: $747 - 598 = 747 - (600 - 2) = (747 - 600) + 2 = 147 + 2 = 149$

Pl. 853- 692=? Gondolkozzunk így: $853- 692= 853- (700- 8)= (853- 700)+8= 153+8=161$

Az utóbbi két példánál szintén a „kerekítési módszert” alkalmaztuk, amiről részletesen a továbbiakban írunk. Végezetül nézzünk még egy példát:

Pl. 725- 468= ? Gondolkozzunk így:

$725- 468= 725- (400+60+8)= (725-400) - (60+8)= 325- (60+8)= (325- 60)- 8= 257.$

4. Számok különbsége, komplementer segítségével

Kétjegyű szám esetén az illető szám komplementerén azt a számot értjük, amennyi hiányzik belőle a 100-ig. Például az 57, 38, 49, 21, 79 számok komplementerei rendre 43, 32, 51, 79, 21. A komplementerek segítségével az egységrend átlépéses kivonásokat könnyebben elvégezhetjük mint az előbbi eljárásokkal. Nézzük a következő példát.

Pl. 725-468=? Gondolkozzunk így: $725- 468= 725- (500- ?)$ Itt a ? helyére a 68 komplementere kell, vagyis $?= 32$ ezért $725= (725-500)+32=225+32= 257.$ Nézzünk egy másik példát is:

Pl. 821-259=? Gondolkozzunk így: $821- 259= 821- (300-?)$ Itt a ? helyére a 59 komplementere kell, $?= 41$ ezért $821- 259= (821- 300) + 41= 562.$ Most gyakoroljuk a bemutatottakat:

- (a) 583-271 (b) 936-725 (c) 587-298 (d) 763-482 (e) 204-185
(f) 793-402 (g) 219-176 (h) 987-784 (i) 455-319 (j) 772-596
(k) 873-357 (l) 564-228 (m) 1428-571 (n) 2345-678 (o) 1776-987

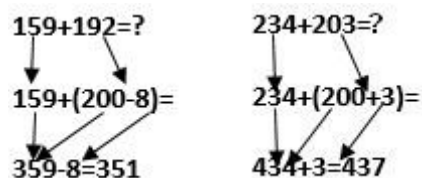
5. Számok összege és különbsége kerekítéssel

A módszer tulajdonképpen a komplementer módszerének sajátos esete, csupán itt arról van szó, hogy ha egy szám közel áll pl. egy kerek százashoz, akkor kerekítjük az illető százásra (felé vagy lefele) és kivonunk illetve hozzáadunk valamennyit. A könnyebb elsajátítás érdekében ezt is példákön szemléltetjük.

Pl. 159+192=? Gondolkozzunk így: $159+ 192= 159+ (200-8)= (159+200)- 8= 359-8= 351.$ Itt az egyik tagot fölfelé kerekítettük, ezért kivonással ellensúlyoztuk. Nézzünk egy olyan példát, ahol lefele kerekítünk.

Pl. 234+203=? Gondolkozzunk így: $234+203= 234+(200+3)= (234+200)+3= 434+3=437.$

Ez utóbbi két feladatot fejben így reprezentálhatjuk:



Ezúttal megjegyezzük, hogy kivonási feladatok is hasonlóan végezhetők el, amit a komplementerek módszerénél is láttuk.

Most térjünk rá szorzással kapcsolatos műveletek esetére. Ezek közül kezdjük a következővel.

6. Két- és három jegyű számok szorzása egyjegyű számmal

Ezúttal is ugyanúgy járunk el akár az összeadásnál és a kivonásnál, mert balról jobbra szorzunk, és nem jobbról balra. Nézzünk máris egy példát.

Pl. 42×7=? Így számolunk: $42×7=7×(40+2)=7×40+7×2=140+14=154$

Pl. 58×4=? Így számolunk: $58×4=4×58=4×(50+8)=4×50+4×8=200+32=232$

Ezek könnyűek voltak, mert nem volt egységrend átlépés, de egységrend átlépés esetén is ép ilyen egyszerű. Nézzük csak a következő példát:

Pl. 38×9=? Így számolunk: $38×9=9×(30+8)=9×30+9×8=270+72=342.$

De mivel a 38 is és a 9 is közel van egy-egy kerek tízeshez, ezért elvégezhetjük kerekítéssel, akár csak az összeadások esetén, és pedig így:

$38×9=40×9-2×8=360-18=342$ vagy $38×9=38×10-38=380-38=342.$

A siker titkát ezúttal is a gyakorlás képezi, jöjjenek hát a gyakorló feladatok:

- (a) 82×9 (b) 43×7 (c) 67×5 (d) 93×8 (e) 49×9 (f) 28×4
(g) 53×5 (h) 84×5 (i) 58×6 (j) 97×4 (k) 78×2 (l) 96×9
(m) 75×4 (n) 57×7 (o) 37×6 (p) 37×6 (q) 46×2 (r) 76×8

Következzenek most a háromjegyű számok szorzása egyjegyűvel. Nézzünk egy példát:

Pl. $320 \times 7 = ?$ Így számolunk: $320 \times 7 = 7 \times 320 = 7 \times 300 + 7 \times 20 = 2100 + 140 = 2240$

Ez nagyon könnyű volt, mert 0-bn végződött, így tulajdonképpen a 7×32 szorzást kellett elvégezni.

Pl. $647 \times 4 = ?$ Így számolunk: $647 \times 4 = 4 \times 600 + 4 \times 40 + 4 \times 7 = 2400 + 160 + 28 = 2560 + 28 = 2588$.

Pl. $184 \times 7 = ?$ Így számolunk: $184 \times 7 = 7 \times 184 = 7 \times 100 + 7 \times 80 + 7 \times 4 = 700 + 560 + 28 = 1260 + 28 = 1288$

Láthattuk, hogy az egységrend átlépés miatt egy kicsit nehezebb dolgunk volt.

A nagyobb siker érdekében ezt is gyakoroljuk, jöjjenek hát a gyakorló feladatok:

- | | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| (a) 431×6 | (b) 637×5 | (c) 862×4 | (d) 957×6 | (e) 927×7 | (f) 728×2 |
| (g) 328×6 | (h) 539×9 | (i) 807×9 | (j) 587×4 | (k) 184×7 | (l) 214×8 |
| (m) 757×8 | (n) 259×7 | (o) 297×8 | (p) 751×9 | (q) 457×7 | (r) 339×8 |

Következzenek most sajátos számokkal való szorzások.

7. Szorzás 9-cel, 99-cel, 999-cel, stb.

A 9-el úgy szorzunk, hogy a számot szorozzuk 10-el, majd visszavonjuk a számot.

A 99-el úgy szorzunk, hogy a számot szorozzuk 100-al, majd visszavonjuk a számot.

A 999-el úgy szorzunk, hogy a számot szorozzuk 1000-el, majd visszavonjuk a számot.

Pl. $125 \times 9 = ?$ Így gondolkodunk: $125 \times 9 = 125 \times 10 - 125 = 1250 - 125 = 1125$. Itt tulajdonképpen két háromjegyű szám különbségét kellett kiszámítani, amit az előbbieken gyakoroltunk.

Pl. $47 \times 99 = ?$ Így gondolkodunk: $47 \times 99 = 47 \times 100 - 47 = 4700 - 47 = 4653$. Itt gyorsan kellett megállapítani egy kétjegyű számnak a komplementerét, amit az előbbieken tárgyaltunk.

Pl. $34 \times 999 = ?$ Így gondolkodunk: $34 \times 999 = 34 \times 1000 - 34 = 34000 - 34 = 33966$. Itt is könnyen kell tudni megállapítani a kétjegyű szám komplementerét.

8. Szorzás 11-el, 101-el, 1001-el, stb.

A 11-el úgy szorzunk, hogy a számot szorozzuk 10-el, majd hozzáadjuk a számot.

A 101-el úgy szorzunk, hogy a számot szorozzuk 100-al, majd hozzáadjuk a számot.

A 1001-el úgy szorzunk, hogy a számot szorozzuk 1000-el, majd hozzáadjuk a számot.

Pl. $125 \times 11 = ?$ Így gondolkodunk: $125 \times 11 = 125 \times 10 + 125 = 1250 + 125 = 1375$. Már itt megjegyezzük, hogy a 11-gyel való szorzásra más, talán praktikusabb szorzási szabály is létezik, ezt a továbbiakban ismertetjük.

Pl. $47 \times 101 = ?$ Így gondolkodunk: $47 \times 101 = 47 \times 100 + 47 = 4700 + 47 = 4747$

Pl. $34 \times 1001 = ?$ Így gondolkodunk: $34 \times 1001 = 34000 + 34 = 34034$

Pl. $11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 = ?$ A megoldás céljából érdemes megjegyeznünk, hogy $1001 = 7 \times 11 \times 13$, ezért $11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 = 11 \times 12 \times 13 \times (2 \times 7) \times 15 = (12 \times 30) \times (7 \times 11 \times 13) = 360 \times 1001 = 360 \times 1000 + 360 \times 360000 + 360 = 360360$.

9. Szorzás 5-tel, 25-tel, 125-tel, stb.

Az 5-tel úgy szorzunk, hogy szorzunk 10-el és osztunk 2-vel, vagy fordítva.

A 25-tel úgy szorzunk, hogy szorzunk 100-al és osztunk 4-el, vagy fordítva.

A 125-tel úgy szorzunk, hogy szorzunk 1000-el és osztunk 8-al, vagy fordítva.

Pl. $248 \times 5 = ?$ Így gondolkodunk: $248 \times 5 = (248 : 2) \times 10 = 124 \times 10 = 1240$. A megoldás során figyelembe vettük, hogy 248 páros, ezért még így is gondolkodhattunk volna: $248 \times 5 = (2 \times 124) \times 5 = 124 \times 10$ vagyis csupán egy 10-el való szorzást kellett elvégeznünk. Itt könnyű dolgunk volt, mert a bal oldali szorzó páros szám volt, ezért könnyen osztható 2-vel. Amikor páratlan, akkor is gondolkodhatunk ugyanígy, de akkor a 10-el való szorzás előtt tizedes számunk lesz, vagy előbb szorzunk 10-el és utána osztunk 2-vel. Nézzük a következő példát:

Pl. $247 \times 5 = ?$ Így gondolkodhatunk: $247 \times 5 = (247 : 2) \times 10 = 123,5 \times 10 = 1235$ vagy másképpen, és pedig $247 \times 5 = (247 \times 10) : 2 = 2470 : 2 = 1235$. Azt, hogy melyik eljárás a könnyebbik, az Olvasó döntheti el, hogy éppen melyiket végzi el könnyebben és hamarabb.

Pl. $244 \times 25 = ?$ Így gondolkodhatunk: $244 \times 25 = (244 : 4) \times 100 = 61 \times 100 = 6100$, de előbb is szorozhattunk volna 100-al, és azután osztottunk volna 4-gyel. De így is gondolkodhatnánk: $244 \times 25 = (4 \times 61) \times 25 = 61 \times 100 = 6100$.

Pl. $37 \times 125 = ?$ Így gondolkodhatunk: $37 \times 125 = (37 \times 1000) : 4 = 37000 : 4 = (3700 : 2) : 2 = 1350 : 2 = 675$

Nézzünk most néhány tanulságos vegyes szorzást:

Pl. $72 \times 250 = ?$ Ezt több féle képpen is elvégezhetjük, például: $72 \times 250 = 72 \times 25 \times 10 = (72 : 4) \times 100 \times 10 =$

= $13 \times 100 \times 10 = 13000$ vagy $72 \times 250 = 13 \times 4 \times 25 \times 10 = 13 \times 100 \times 10 = 13000$.

Pl. $12 \times 7 \times 5 \times 10 = ?$ Ezt is több féle képpen is elvégezhetjük, nézzük a legegyszerűbbet: $12 \times 7 \times 5 \times 10 = (6 \times 2) \times 7 \times 5 \times 10 = (6 \times 7) \times (2 \times 5) \times 10 = 42 \times 10 \times 10 = 4200$.

Pl. $16 \times 125 \times 250 = ?$ Legegyszerűbben így gondolkodhatunk: $16 \times 125 \times 250 = (2 \times 8) \times 125 \times 250 = 2 \times (8 \times 125) \times 250 = 2 \times 1000 \times 250 = 250000 \times 2 = 500000$

Pl. $25 \times 52 \times 8 \times 125 = ?$ Így gondolkodhatunk: $25 \times 52 \times 8 \times 125 = 25 \times (4 \times 16) \times (8 \times 125) = (25 \times 4) \times 16 \times 1000 = 100 \times 16 \times 1000 = 1600000$

Pl. $75 \times 25 \times 16 = ?$ Legegyszerűbben így gondolkodhatunk:
 $75 \times 25 \times 16 = 3 \times 25 \times 25 \times 4 \times 4 = 3 \times (25 \times 4) \times (25 \times 4) = 3 \times 100 \times 100 = 30000$

Pl. $48 \times 375 \times 250 = ?$ Legegyszerűbben így gondolkodhatunk: $48 \times 375 \times 250 = 3 \times 16 \times 3 \times 125 \times 250 = 9 \times (8 \times 125) \times (2 \times 250) = 9 \times 1000 \times 500 = 9000 \times 500 = 4500000$

10. Két-, három- és többjegyű számok szorzása 11-el

Pl. $32 \times 11 = ?$ Ha egy kétjegyű számot jobbról vagy balról szorzunk 11-gyel, így néz ki:

$$\begin{array}{r} \underline{11 \times 32} \\ 32 \\ 32 \\ \hline 352 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{32 \times 11} \\ 32 \\ 32 \\ \hline 352 \end{array}$$

Észrevehető, hogy mind a két esetben a 2 és a 3 egymás alatt is elhelyezkedik, és ezeket össze kell adni. Tehát így írhatjuk: $32 \times 11 = 3(3+2)2 = 352$. Vizsgáljunk meg most egy olyan szorzást, ahol van egységrend átlépés is.

Pl. $85 \times 11 = ?$ Nézzük most is a tradicionális szorzást, mint jobbról, mint balról:

$$\begin{array}{r} \underline{85 \times 11} \\ 85 \\ 85 \\ \hline 935 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{11 \times 85} \\ 85 \\ 85 \\ \hline 935 \end{array}$$

Vegyük észre, hogy mind a két szorzásban egy 5-ös és egy 8-as egymás alatt van, és alattuk 3 szerepel, előttük meg nem a 8-as van, hanem a 9-es. Itt tulajdonképpen $8+5=13$ lett, és „továbbment” egy egységrend és a $8+1=9$ miatt lett a 9-es.

A szabály röviden így módosul: $85 \times 11 = 8(8+5)5 = 8(13)5 = (8+1)35 = 935$.

A megállapított szabály még így is ellenőrizhető: $\overline{xy} \times 11 = 100x + 10(x+y) + y \Leftrightarrow (10x+y) \times 11 = 110x + 11y$ ami igaz.

A három vagy többjegyű számok 11-gyel való szorzása hasonló megfigyelésen és számoláson alapszik:

Pl. $214 \times 11 = ?$ Ha ezúttal is megfigyelnénk a közönséges szorzás algoritmusát, akkor az előbbieket mintájára a következő szabály állapítható meg: $214 \times 11 = 2(2+1)(1+4)4 = 2354$

ha tízes egységrend átlépés is van, akkor ugyanúgy járunk el mint a kétjegyű számok esetén:

Pl. $987 \times 11 = ?$ Így számolhatunk: $987 \times 11 = 9(9+8)(8+7)7 = 9(17)(15)7 = 9(18)57 = 10857$

Háromnál többjegyű szám esetén is ugyanez a helyzet:

Pl. $472634 \times 11 = ?$ Így számolhatunk: $472634 \times 11 = 4(4+7)(7+2)(2+6)(6+3)(3+4)4 = 4(11)98974 = 5198974$

Gyakorlásnak álljanak itt a következő szorzások:

- | | | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| (a) 16×11 | (b) 62×11 | (c) 84×11 | (d) 76×11 | (e) 43×11 | (f) 54×11 |
| (g) 64×11 | (h) 25×11 | (i) 77×11 | (j) 135×11 | (k) 437×11 | (l) 387×11 |
| (m) 5468×11 | (n) 1245×11 | (o) 5364×11 | (p) 12345×11 | (q) 24567×11 | (r) 456789×11 |

Folytatjuk a következő számban.