Gyors fejszámolási tippek, trükkök és ötletek (II. rész)

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Az előző részben bemutatott trükkök után, most következzenek sajátos alakú kétjegyű számok szorzása, és hatványozása:

11. Az $\overline{1a}$ és $\overline{1b}$ alakú számok szorzása

Itt tulajdonképpen 10 és 19 közötti számok szorzásáról van szó.

Ez a fejszámolás 4 lépésben zajlik le, nézzünk egy konkrét példát:

Pl. 18×17=? A lépések a következők:

1) Az egyik számhoz adjuk hozzá a másik szám utolsó számjegyét: 18+7=25
2) Az így kapott összeget szorozzuk meg 10-el: 25×10=250
3) Most szorozzuk össze az eredeti két szám utolsó számjegyeit: 8×7=56
4) Adjuk össze az utóbbi két szorzás eredményeit: 250+56= 306

Nézzünk még egy példát:

Pl. 14×18=? Az előbbi lépésekben megadott számolásokat így tömöríthetjük:

14×18= (14+8)×10+4×8=220+32=252.

Nézzük most általánosan, hogy miért is igaz ez a fejszámolási szabály:

$\overline{1a} \times \overline{1b} = (10+a+b)\times 10+a\times b \Leftrightarrow$ (10+a)×(10+b)= $(10+a+b)\times 10+a\times b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100+ 10a+ 10b+ a\times b= 100+ 10a +10b+ a\times b$.

És most következzék néhány gyakorló példa:

(a) 15×12	(b) 17×17	(c) 19×16	(d) 12×16	(e) 17×16	(f) 19×14
(g) 18×13	(h) 17×11	(i) 19×15	(j) 18×16	(k) 15×12	(l) 13×17

12. Az $\overline{a1}$ és $\overline{b1}$ alakú számok szorzása

Ez a fejszámolás is 4 lépésben zajlik le, nézzünk egy konkrét példát:

Pl. 51×31=? A lépések a következők:

1) Szorozzuk össze a két baloldali számjegyet: 5×3=15
2) Most adjuk össze a két baloldali számjegyet: 5+3=8
3) Írjuk egymás után az előbbi két eredményt: 158
4) Az így kapott szám végére írjunk 1-et: 1581

Nézzünk még egy példát:

Pl. 71×91=? Az előbbi lépésekben megadott számolásokat így tömöríthetjük:

71×91=(7×9)(7+9)1=(63)(16)1=(63+1)61=6461 ami tulajdonképpen ezt jelenti:

71×91=(7×9)(7+9)1=(7×9)×100+(7+9)×10+1=6300+16×10+1=6461

Figyeljük meg, hogy itt az egységrend a számjegyek összegéből „továbbment”.

Nézzük most általánosan, hogy miért is igaz ez a fejszámolási szabály:

$\overline{a1} \times \overline{b1} = (a\times b)\times 100+(a+b)\times 10+1 \Leftrightarrow (10a+1)(10b+1) = (a\times b)\times 100+(a+b)\times 10+1$ ami igaz.

És most következzék néhány gyakorló példa:

(a) 51×21	(b) 71×71	(c) 91×61	(d) 21×61	(e) 71×61	(f) 91×41
(g) 81×31	(h) 71×11	(i) 91×51	(j) 81×61	(k) 51×21	(l) 31×71

13. Az $\overline{ax}$ és $\overline{ay}$ alakú számok szorzása ha *x+y=10*

Pl. 38×32=?

A fejszámolás lépései a következők:

1) A tízesek számjegyéhez adjunk hozzá 1-ez, és szorozzuk meg az eredeti számjeggyel: 3×(3+1)=12
2) Szorozzuk össze az egyesek helyén álló két számjegyet: 8×2=16
3) Most írjuk egymás után a két szorzatot: 1216

Most nézzünk egy másik példát:

Pl. 31×39=? A lépéseket követve 3×(3+1)=12**,** 1×9=9 de az eredmény nem 129 hanem 1209 vagyis az egyjegyű számot 0 írásával alakítjuk kétjegyűvé!

Nézzük most általánosan, hogy miért is igaz ez a fejszámolási szabály:

$(10a+b)\times(10a+(10-b))= a\times(a+1)\times100+b\times(10-b) \Leftrightarrow 100\times a^2+100\times a-b^2+10b = 100\times a^2+100\times a-b^2+10b$

Most nézünk hatványozási szabályokat, azok közül is egy olyant ami az előbbihez hasonló szabályt ad.

És most következzék néhány gyakorló példa:

(a) 43×47 (b) 24×26 (c) 59×51 (d) 42×48 (e) 23×27
(f) 54×56 (g) 37×33 (h) 94×96 (i) 69×61 (j) 68×62

14. Az $\overline{a5}$ alakú számok négyzete

Tulajdonképpen tehát az 5-ben végződő számok négyzetéről van szó.

Pl. 35×35=?

A fejszámolás lépései a következők:

1) A tízesek számjegyéhez adjunk hozzá 1-ez, és szorozzuk meg az eredeti számjeggyel: 3×(3+1)=12
2) Ennek a számnak a végére írjunk 25-öt: 1225

Nézzük most általánosan, hogy miért is igaz ez a fejszámolási szabály:

Így számoltunk: $(10a+5)^2=100\times a^2+100\times a+5^2=100\times a\times(a+1)+25$

És most következzék néhány gyakorló példa:

(a) 15×15 (b) 25×25 (c) 45×45 (d) 55×55 (e) 65×65
(f) 75×75 (g) 85×85 (h) 95×95

Megjegyzés: Az előbbiekben bemutatott szabály valójában érvényes minden 5-ben végződő számra, nem csak a kétjegyűekre, ellenben mint látni fogjuk, itt más jellegű nehézséggel állunk szembe.

Pl. 105×105=? Kövessük az előző lépéseket, kissé módosítva:

1) Válasszuk le az 5 előtti számot, adjunk hozzá 1-et és szorozzuk meg ezzel: (10+1)×11=110
2) Ennek a számnak a végére írjuk oda a 25-öt: 11025

Pl. 255×255=? Most is kövessük az előbbi módosított lépéseket:

1) Szorozzuk össze: 25×(25+1)= 25×25+25=625+25=650
2) Írjuk ez után a 25-öt: 65025

Beláthattuk, hogy itt a 25×(25+1)= 25×25+25 kiszámolásánál már alkalmaztuk a 25×25 kiszámolási trükkjét. Ellenben, ha a 25 helyett más szám van, akkor általában az $a\times(a+1)= a^2+a$ fejbeni kiszámolása nem azonnali, ellenben miután az alábbiakban megtanuljuk az a^2 fejbeni kiszámolását, akkor az előbbi összeg is azonnal adódik.

15. A $\overline{9x}$ alakú számok négyzete

Tulajdonképpen a 90 és 99 közötti számok négyzetéről van szó.

Pl. 97×97=? A fejszámolás lépései a következők:

1) Vonjuk ki 100-ból a négyzetre emelendő számot: 100-97=3
2) Most az eredeti számból vonjuk ki az imént kapott különbség értékét: 97-3=94
3) Az 1. lépésnél kapott számot emeljük négyzetre, és ha csak egyjegyű, írjunk eléje 0-át: 3^2=09
4) A 2. és 3. lépésnél kapott számokat írjuk egymás mellé: 9409

Nézzük most általánosan, hogy miért is igaz ez a fejszámolási szabály:

$\overline{9x}\times\overline{9x}=[\overline{9x} - (100-\overline{9x})]\times100+(100-\overline{9x})^2 \Leftrightarrow (90+x)\times(90+x)= (90+x-100+90+x)\times100+(100^2-1800x+x^2)$

és a számolások alapján ez igaz.

És most következzék néhány gyakorló példa:

(a) 91×91 (b) 92×92 (c) 93×93 (d) 94×94 (e) 95×95
(f) 96×96 (g) 98×98 (h) 99×99

16. A $\overline{10x}$ alakú számok négyzete

Belátható, hogy tulajdonképpen a 100 és 109 közötti számok négyzetéről van szó.

Pl. 103×103=? A fejszámolás lépései a következők:

1) Az utolsó számjegyet adjuk hozzá az eredeti számhoz: 3+103=106
2) Az utolsó számjegyet emeljük négyzetre, és ha ez egyjegyű, írjunk eléje 0-át: 3^2= 09
3) Írjuk egymás után az előbbi két számot: 10609

Nézzük most általánosan, hogy miért is igaz ez a fejszámolási szabály:

$\overline{10x}\times\overline{10x} = (x+\overline{10x})\times100+x^2 \Leftrightarrow (100+x)\times(100+x)=(x+100+x)\times100+x^2$ és ez pedig igaz.

És most következzék néhány gyakorló példa:

(a) 101×101 (b) 102×102 (c) 107×107 (d) 104×104 (e) 105×105
(f) 106×106 (g) 108×108 (h) 109×109

17. A $\overline{4x}$ alakú számok négyzete

Belátható, hogy tulajdonképpen a 40 és 49 közötti számok négyzetéről van szó.

Pl. 48×48=? A fejszámolás lépései a következők:

1) Vonjuk ki az eredeti számot az 50-ből: 50-48=2
2) A kapott számot vonjuk ki a 25-ből: 25-2=23
3) Az 1. lépés eredményét emeljük négyzetre, ha egyjegyű lesz, írjunk elébe 0-át: 2^2=04
4) Az előző két lépés számait írjuk egymás után: 2304

Nézzük most általánosan, hogy miért is igaz ez a fejszámolási szabály:

$\overline{4x}\times\overline{4x}$=[25-(50-$\overline{4x}$)]×100+(50-$\overline{4x}$)^2 $\Leftrightarrow$ (40+x)×(40+x)=(25-50+40+x)×100+(50-40-x)^2 $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ 1600+80x+x^2= (15+x)×100+(100-20x+x^2) és ez igaz.

És most következzék néhány gyakorló példa:

(a) 41×41 (b) 42×42 (c) 43×43 (d) 44×44 (e) 45×45
(f) 46×46 (g) 47×47 (h) 49×49

18. Az $\overline{5x}$ alakú számok négyzete

Belátható, hogy tulajdonképpen az 50 és 59 közötti számok négyzetéről van szó.

Pl. 53×53=? A fejszámolás lépései a következők:

1) Az utolsó számjegyhez adjunk 25-öt: 3+25=28
2) Az utolsó számjegyet emeljük négyzetre, ha egyjegyű, írjunk elébe 0-át: 3^2=09
3) Az előző két számot írjuk egymás után: 2809

Nézzük most általánosan, hogy miért is igaz ez a fejszámolási szabály:

$\overline{5x}\times\overline{5x}$ = (25+x)×100+x^2 $\Leftrightarrow$ (50+x)×(50+x)=2500+100x+ x^2 és ez igaz.

És most következzék néhány gyakorló példa:

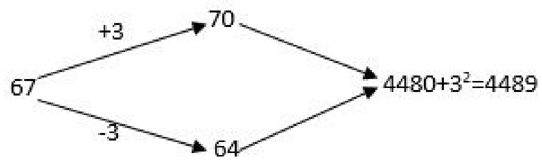
(a) 51×51 (b) 52×52 (c) 58×58 (d) 54×54 (e) 55×55
(f) 56×56 (g) 57×57 (h) 59×59

19. Kétjegyű számok négyzete általában

Pl. 67×67=? A fejszámolás lépései a következők:

1) Kerekítsük fel az adott számot a legközelebbi kerek tízesre: 67+3=70
2) Most szorozzuk meg ezt, az eredeti számnál 3-mal kisebb számmal:
   70×64= 10×7×64=10×448=4480
3) A kerekítésig levő számjegyet emeljük négyzetre, és adjuk az előző számhoz: 4480+3^2=4489

Az előbbieket fejben így vizualizálhatjuk:



Könnyen belátható, hogy itt a legnehezebb lépés, a kétjegyű szám egyjegyűvel való szorzása volt (a 2. lépés), ami egy kis tréninggel könnyűvé tehető.

Nézzük most általánosan, hogy miért is igaz ez a fejszámolási szabály:

Az A^2-d^2=(A+d)×(A-d) rövidített számolási képlet még így is írható: A^2=(A+d)×(A-d)+ d^2 ahol A a négyzetre emelendő szám, és d a legközelebbi kerek tízesig levő szám.

20. Kétjegyű számok négyzete másképpen

Pl. 47×47=? Így számolunk:

1) Számítsuk ki: (4×4)(7×7)= 1649
2) Számítsuk ki: 20×4×7= 560
3) Adjuk össze a két eredményt: 1649+56=2209

Az elméleti háttér: $\overline{ab}\times\overline{ab}$ = *(a×a)×100+b×b+20×a×b* $\Leftrightarrow$ (10a+b)^2= 100 a^2+ 20 a×b+ b^2 nyilvánvaló.

És most következzék néhány gyakorló példa:

(a) 14×14 (b) 27×27 (c) 65×65 (d) 89×89 (e) 98×98 (f) 31×31
(g) 41×41 (h) 59×59 (i) 26×26 (j) 53×53 (k) 21×21 (l) 64×64
(m) 42×42 (n) 55×55 (o) 75×75 (p) 84×84 (q) 67×67 (r) 93×93

Ha ez már jól megy, akkor próbálkozzunk a következővel:

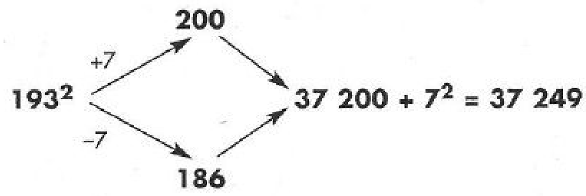
21. Háromjegyű számok második hatványa (négyzete)

Észrevehettük, hogy a kétjegyű számok esetén kerek tízesre kerekítettünk, most pedig a kerek százasra kerekítünk. A lépéseket szemléltessük egy példán:

Pl. 193×193=?

1) Kerekítsük fel az adott számot a legközelebbi kerek százasra: 193+7=200
2) Most szorozzuk meg ezt, az eredeti számnál 7-tel kisebb számmal: 200×186=37200
3) A kerekítésig levő számjegyet emeljük négyzetre, és adjuk az előző számhoz: $37200+7^2=37249$

Az előbbieket fejben így vizualizálhatjuk:



Belátható, hogy ennél a szabálynál a legnehezebb művelet a 186×2 fejbeni kiszámolása volt, vagyis a háromjegyű szám szorzása egyjegyűvel, de kellő gyakorlással ez is könnyűvé tehető.

Most gyakoroljuk a leírtakat:

(a) 409×409 (b) 805×805 (c) 217×217 (d) 896×896 (e) 345×345
(f) 346×346 (g) 276×276 (h) 682×682 (i) 431×431 (j) 781×781

Következzék most a fejszámolás egyik legfontosabb része:

22. Két kétjegyű szám szorzása

Legyen $\overline{ab}=10a+b$ és $\overline{cd}=10c+d$ két kétjegyű szám. A kéttagú algebrai kifejezések szorzási szabálya alapján felírhatjuk: $\overline{ab}$ × $\overline{cd}$ = $(10a+b)$× $(10c+d)$= *100 (a×c)+ 10 b×c+ 10a×d +b×d* és máris megvan a szabály, amit így írhatunk le: 100 szorozva a két első számjegy szorzatával, 10 szorozva egyik első másuk utolsó számjegy szorzatával, 10 szorozva a másik első és másik hátsó számjegy szorzatával, és a két hátsó számjegy szorzata, és mindezt összeadjuk. Lehet, hogy hosszúnak és bonyolultnak tűnik, de gyakorlással könnyűvé válhat. Nézzük a példát:

Pl. 46×42=? Fejben így számolunk: 46×42= 100×4×4+10×2×4+10×6×4+2×6=1600+80+240+16=1932.

Most nézzünk néhány gyakorló feladatot:

(a) 31×41 (b) 27×18 (c) 59×26 (d) 53×58 (e) 77×43
(f) 23×84 (g) 62×94 (h) 88×76 (i) 92×35 (j) 34×11

A két kétjegyű szám szorzásának a megtanulása hozzásegít a következő művelet elvégzéséhez:

23. Kétjegyű számok harmadik hatványa (köbe)

A kétjegyű szám négyzetének a kiszámolását **a** $A^2=(A+d)\times(A-d)+d^2$ rövidített számolási képlet tette lehetővé, ahol az A számot kiegészítettük a d számjeggyel kerek tízesre. Ezúttal is egy azonosságot fogunk használni, éspedig az $A^3=(A-d)\times A\times(A+d)+d^2\times A$ ahol az A számot szintén egy d számjeggyel egészítjük ki kerek tízesre. Nézzünk egy konkrét példát:

Pl. 13×13×13=? Az előbbi azonosság alapján így számolunk: $13^3=(13-7)\times13\times(13+7)+7^2\times13$ vagy ha nem felfele, hanem lefele kerekítünk, akkor $13^3=(13-3)\times13\times(13+3)+3^2\times13$. Belátható, hogy a második esetben a $3^2\times13$ könnyebb mint az első esetből a $7^2\times13$, tehát a lefelé illetve felfelé kerekítés közül válasszuk azt, amelyik esetben kisebb számot kell használjunk. Tehát $13^3=(13-3)\times13\times(13+3)+3^2\times13=$

$=10\times13\times16+9\times13=2080+117=2197$. Belátható, hogy ebben a műveletsorban a legnehezebb elvégzendő számítás a két kétjegyű szám szorzása, a 13×16 elvégzése, a 9×13 már könnyebb, de elegendő gyakorlással minden számolás könnyebbé tehető.

Gyakoroljuk a leírtakat a következő számolásokkal:

(a) 12^3	(b) 17^3	(c) 21^3	(d) 28^3	(e) 33^3
(f) 39^3	(g) 40^3	(h) 44^3	(i) 52^3	(j) 56^3
(k) 65^3	(l) 71^3	(m) 78^3	(n) 85^3	(o) 87^3

Lehet, hogy kakukktojásnak számít, de következzen egy olyan trükk, amely nem csak tartalma miatt, hanem kinézete miatt is lenyűgöző.

24. Csupa egyesekből álló számok négyzete

A továbbiakban az 1, 11, 111, 1111, …, 111111111 számok második hatványára gondolunk, és mit könnyebb észben tartani, mint ezeknek a négyzetét, amelyek így néznek ki:

1 x 1 = 1
11 x 11 = 121
111 x 111 = 12321
1111 x 1111 = 1234321
11111 x 11111 = 123454321
111111 x 111111 = 12345654321
1111111 x 1111111 = 1234567654321
11111111 x 11111111 =
123456787654321
111111111 x 111111111 =
12345678987654321

Gondolom, hogy a szabályt mindenkinek sikerült leolvasnia.

És ha már itt tartunk, következzen néhány szemgyönyörködtető számpiramis:

1 x 8 + 1 = 9	1 x 9 + 2 = 11	9 x 9 + 7 = 88
12 x 8 + 2 = 98	12 x 9 + 3 = 111	98 x 9 + 6 = 888
123 x 8 + 3 = 987	123 x 9 + 4 = 1111	987 x 9 + 5 = 8888
1234 x 8 + 4 = 9876	1234 x 9 + 5 = 11111	9876 x 9 + 4 = 88888
12345 x 8 + 5 = 987 65	12345 x 9 + 6 = 111111	98765 x 9 + 3 = 888888
123456 x 8 + 6 = 987654	123456 x 9 + 7 = 1111111	987654 x 9 + 2 = 8888888
1234567 x 8 + 7 = 9876543	1234567 x 9 + 8 = 11111111	9876543 x 9 + 1 = 88888888
12345678 x 8 + 8 = 98765432	12345678 x 9 + 9 = 111111111	98765432 x 9 + 0 = 888888888
123456789 x 8 + 9 = 987654321	123456789 x 9 +10= 1111111111	

Végezetül megjegyezzük, hogy a fejszámolások boszorkány konyhájában még sok minden kotyvasztható, ezért az érdeklődő Olvasónak az [1] átolvasását javasoljuk.

Befejezésül kihangsúlyozzuk, hogy a bemutatott szabályok bármelyike csak úgy válik nyílván valóvá és fejben könnyen elvégezhetővé, hogy ha sokat gyakoroljuk. Éppen ezért az érdeklődő Olvasónak a leírt szabályok gyakorlását javasoljuk főleg az előbbiekben kitűzött példák által és a mindennapi életben való alkalmazások által. Ha elején lassan is mennek a fejszámolások, esetleg még papírra és ceruzára is van még szükség, nem kell csüggedni, mert a sok gyakorlás meghozza a várt eredményt és az elmaradhatatlan sikerélményt.

Szakirodalom

[1] Arthur Benjamin, Michael Shermer: Fejszámolás, Boszorkányos matematikai trükkök, Partvonal Könyvkiadó, 2010

[2] Róka Sándor: Számoljunk ügyesen!, Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft., 2003

[3] http://hu.wikipedia.org/wiki/Fejsz%C3%A1mol%C3%A1si_m%C3%B3dszerek

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Mental_calculation

[5] http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/rapid/rapid.shtml

[6] https://play.google.com/store/apps/details?id=example.matharithmetics

[7] https://play.google.com/store/apps/details?id=com.funmathtricks.lite

[8] https://play.google.com/store/apps/details?id=com.cyandroid.mentalmathfree

[9] https://play.google.com/store/apps/details?id=com.intellect.vedicmathstricks

[10] https://play.google.com/store/apps/details?id=com.speedmathpro