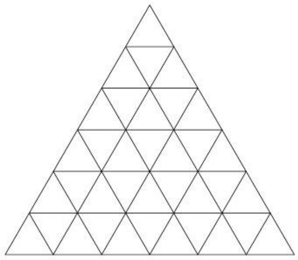
Hány háromszög látható?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Ebben a dolgozatban a következő típusú feladattal foglalkozunk: Hány háromszög látható az alábbi ábrán?



Annak ellenére, hogy egyszerű számlálásról van szó, még is gondot okozhat az a tény, hogy a látható háromszögek száma elképzelhetően elég nagy és félő, hogy a számlálásból nehogy kimaradjon valamennyi háromszög. Éppen ezért jó lenne, ha valamilyen módszeres számlálást végeznénk. ami rendszerezi és áttekinthetőbbé teszi a számlálásunkat. Ha egy számlálási algoritmushoz eljutnánk, akkor könnyen általánosíthatnánk a feladatot akár hányas oldalfelosztásra. A továbbiakban éppen ennek a feladatnak az általánosításáról lesz szó, és mindez csak elemi módszerekkel.

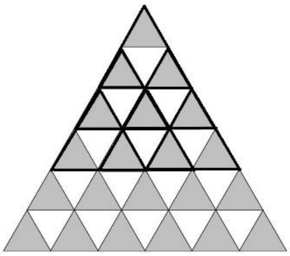
A feladat általánosításának a megfogalmazása már 1962-ben megjelent (v.ö. [7]), de megoldás nem, aztán másodszor 1966-ban jelent meg (v.ö. [1[), de ekkor sem jelent meg megoldás, csupán javaslat a megoldásra. Aztán egyre többet kezdtek foglalkozni a problémával, mígnem az utóbbi 40 esztendőben mindössze már 7-8 különböző megoldása jelent meg (v.ö. [9], letölthető [16]-nál). A megoldások változatosabbnál változatosabb módszereket mutatnak be, de nem igazán elemi megoldások. Az alábbiakban egy teljes elemi megoldást mutatok be, minden valószínűséggel leg természetesebbet és leg elemibbet.

<u>Az általános feladat:</u>

Legyen $n \geq 1$ adott természetes szám. Egy szabályos háromszög mindhárom oldalát osszuk fel n egyenlő részre, és húzzuk is meg az oldalakkal párhuzamos egyeneseket. Számítsuk ki, hogy hány háromszög látható az ábrán?

Ahhoz, hogy megszámláljuk a háromszögek számát szükséges lesz, hogy kísérletezzünk különböző méretű háromszögekkel, és jól összegezzük a megfigyeléseinket.

A kísérletezéseink során hamar rájövünk arra, hogy a megszámlálás során külön kell választanunk a talpukon álló háromszögeket (Δ) és a csúcson álló háromszögeket (∇). Ebből kifolyólag vezessük be a következő jelöléseket: legyen S(n) az ábrán látható háromszögek száma, legyen $\Delta(n)$ az ábrán látható, talpukon álló háromszögek száma, és legyen $\nabla(n)$ az ábrán látható, és a csúcson álló háromszögek száma. Ekkor természetesen S(n) = $\Delta(n) + \nabla(n)$ minden $n \geq 1$ természetes szám esetén.



Szemléltetés képpen tekintsük az n=6 esetén készített ábrát, azon magyarázva próbálunk általános jellegű következtetéseket levonni.

Először is nevezzük 1-es háromszögnek azt a háromszöget, amelynek oldalhossza egy egység, 2-esnek azt amelynek oldalhossza két egység, és így tovább. Számoljuk össze módszeresen az 1-es, 2-es, 3-as,… háromszögek számát, és fogalmazzunk meg képletet a kiszámolásukra. Vegyük észre, hogy az 1-es háromszögből éppen 1+2+3+4+5+6 darab van. A 2-es háromszögből szintén lefele és balról jobbra haladva láthatjuk, hogy 1+2+3+4+5 darab van, a 3-as háromszögekből 1+2+3+4, a 4-es háromszögekből 1+2+3, az 5-ös háromszögekből 1+2 és végül a 6-os (az eredeti) háromszögből 1 darab van. Ezek szerint felírható, hogy:

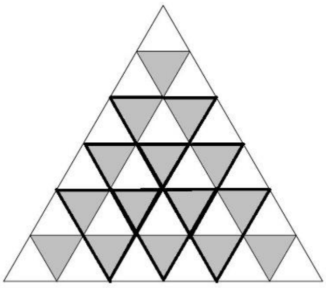
$$\Delta(6) = (1+2+3+4+5+6)+(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4)+(1+2+3)+(1+2)+1$$

Ennek alapján most már könnyen felírható, hogy az n felosztású háromszög esetén igaz, hogy:

$$\Delta(n) = \sum_{i=1}^{n}(1+2+3+\ldots+i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2+i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4}$$

Számolások után kapjuk, hogy:

$$\Delta(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \qquad (1)$$



Most számláljuk össze a csúcson álló háromszögeket. Itt valamivel több kísérletezésre lesz szükség ahhoz, hogy képletet tudjunk megállapítani. A tanulmányozásunkat ezúttal is az n=6 esetben készített ábrán végezzük. Az 1-es típusú háromszögekből 1+2+3+4+5 darab van, a 2-es háromszögekből 1+2+3 van, a hármas háromszögből 1 darab van. Tehát $\nabla(6) = (1+2+3+4+5)+(1+2+3)+1$. Vegyük észre, hogy n=6 esetén a $\nabla(6)$-nak éppen 6:2=3 tagja van. Végezzünk kísérletet az n=7 esetén is. Ott is beláthatjuk, hogy a $\nabla(7)$-nek ugyancsak 3 tagja van. Ebből arra következtetünk, hogy a $\nabla(n)$-nek éppen $\left[\frac{n}{2}\right]$ tagja lesz, ahol [a] az a szám egész részét jelöli. További alapos megfigyelések alapján felírhatjuk, hogy:

$$\nabla(n) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(1+2+3+\ldots+(n+1-2i)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(n+1-2i)(n+2-2i) \qquad (2)$$

Ezt az összeget zárt alakra fogjuk hozni külön-külön az n=2k és n=2k+1 esetekben. Vegyük sorra!

$$\nabla(2k) = \sum_{i=1}^{k}(2k+1-2i)(k+1-i) = \sum_{i=1}^{k}(k+1)(2k+1) - \sum_{i=1}^{k}(4k+3)i + \sum_{i=1}^{k}2i^2 =$$

$$= k(k+1)(2k+1) - (4k+3)\frac{k(k+1)}{2} + 2\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = k(k+1)\frac{4k-1}{6} = \frac{2k(2k+2)(4k-1)}{24}.$$

Most figyelembe vesszük, hogy n=2k, így visszaírva a 2k=n értéket kapjuk, hogy:

$$\nabla(2k) = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} = \frac{2n^3+3n^2-2n}{24} \qquad (2.1)$$

amennyiben n=2k páros szám. Most zárt alakra hozzuk a $\nabla(2k+1)$-et is. Rendre felírható, hogy:

$$\nabla(2k+1) = \sum_{i=1}^{k}(k+1-i)(2k+3-2i) = \sum_{i=1}^{k}(k+1)(2k+3) - \sum_{i=1}^{k}(4k+5)i + \sum_{i=1}^{k}2i^2 =$$

$$= k(k+1)(2k+3) - (4k+5)\frac{k(k+1)}{2} + 2\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = k(k+1)\frac{4k+5}{6} = \frac{2k(2k+2)(4k+5)}{24}.$$

Most figyelembe vesszük, hogy n=2k+1, ezért 2k=n-1 amit visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$\nabla(2k+1) = \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24} = \frac{2n^3+3n^2-2n-3}{24} = \frac{2n^3+3n^2-2n}{24} - \frac{1}{8} = \Delta(2k) - \frac{1}{8} \quad (2.2)$$

Vezessük be most a következő függvényt: $k(n) = \begin{cases} 0 \; ha \; n = 2k \\ 1 \; ha \; n = 2k+1 \end{cases}$ ahol $k \geq 1$ természetes szám.

Ekkor, a (2.1) és (2.2) összefüggések alapján minden $n \geq 1$ természetes szám esetén felírható, hogy:

$$\nabla(n) = \frac{n(n+1)(2n-1)}{24} - \frac{k(n)}{8} \qquad (2)$$

Most az (1) és (2) összefüggések alapján megkapjuk az összes háromszögek számát az S(n)-et ami:

$$S(n) = \Delta(n) + \nabla(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)(2n-1)}{24} - \frac{k(n)}{8} = \frac{n(n+2)}{6}(6n+3) - \frac{k(n)}{8} =$$

$$= \frac{n(n+2)(2n+1)-k(n)}{8} = \left[\frac{n(n+2)(2n+1)}{8}\right] \qquad (*)$$

ahol [a] az a valós szám egész részét jelöli, és $k(n) = \begin{cases} 0 \; ha \; n = 2k \\ 1 \; ha \; n = 2k+1 \end{cases}$.

Ezzel megkaptuk, hogy a (*) képlet adja az összes látható háromszögek számát.

Az n=6 esetben $S(6) = \left[\frac{6 \cdot 8 \cdot 13}{8}\right] = 78$ vagyis ennyi háromszög látható a dolgozat elején megfogalmazott feladat esetén.

Forrásanyag

[1.] J. E. Brider, A mathematical adventure, Mathematics Teaching 37 (1966) 17–21.
[2.] L. Carlitz and R. Scoville, A well-known problem, solution, Mathematics Magazine 47 (1974) 290–291.
[3.] R. J. Cormier and R. B. Eggleton, Counting by correspondence, Mathematics Magazine 49 (1976) 181–186.
[4.] R. E. Edwards, Problem 889, Mathematics Magazine 47 (1974) 46–47.
[5.] R. H. Garstang, Triangles in a triangle, Mathematical Gazette 70 (1986) 288–289.
[6.] F. Gerrish, How many triangles?, Mathematical Gazette 54 (1970) 241–246.
[7.] J. Halsall, An interesting series, Mathematical Gazette 46 (1962) 55–56.
[8.] C. L. Hamberg and T. M. Green, An application of triangular numbers, Mathematics Teacher 60 (1967) 339–342.
[9.] Mogens Esrom Larsen, The Eternal Triangle – A History of a Counting Problem, Coll. J. Math. 20, No. 5 November (1989) 370–384.
[10.] B. W. Martin, How many triangles?, Mathematical Gazette 55 (1971) 440–441.
[11.] B. D. Mastrantone, How many triangles?, Mathematical Gazette 55 (1971) 438–440.
[12.] J. W. Moon and N. J. Pullman, The number of triangles in a triangular lattice, Delta 3 (1973) 28–31.
[13.] B. Prielipp and N. J. Kuenzi, A well-known problem, comment, Mathematics Magazine 47 (1974) 290.
[14.] N. J. A. Sloane, A Handbook of Integer Sequences, Academic, New York, 1973, Sequence #1569.
[15.] Celia Wells, Numbers of triangles, Mathematics Teaching 54 (1971) 27–29.
[16] www.math.ku.dk/~mel/mel.pdf