FELADATOK A MATEMATIKAI INDUKCIÓ TANÍTÁSÁHOZ

Tuzson Zoltán

A logikában indukciónak nevezzük azt a következtetési módot, amelynek segítségével valamely halmazon belül az egyes esetekből az általánosra következtetünk. Ezért az indukció olyan módszer, amellyel megfigyelés és egyes esetek kombinációja útján általános törvényeket fedezhetünk fel.

Induktív eljárással a szabályszerűségekről sejtéseink alakulhatnak ki, amelyeket be is kell bizonyítani (a matematikára jellemző precíz dedukcióval), hiszen egyes esetekről az általános esetre való kiterjesztés nem mindig igaz. Ha igaz, akkor is bizonyítani kell. Pontosan ezt a célt szolgálja a teljes matematikai indukció módszere.

Sajnálatos módon, a tankönyvekben és a példatárak nagyrészében, a fenti cím alatt csak azonosságokat, egyenlőtlenségeket vagy oszthatósági feladatokat találunk. Ez egyoldalú, mechanikus tevékenységgé alakíthatja át a teljes matematikai indukció módszerét, megfosztva a tanulókat azoktól a tanulságoktól, amelyeket levonhatnának, miközben az egyszerű megállapítástól a sejtésig, majd a bizonyításig jutnak el.

Mivel az indukció legfontosabb segédeszközei az analógia, az általánosítás és a specializálás, azért olyan jellegű feladatokat is közlünk, amelyek a sejtés és a bizonyítás közötti kapcsolatot erősítik. Így alkalom adódik a parciális indukció megismerésére is.

Egyik fő célkitűzésünk a feladatok változatossága mellett az, hogy kezdők (sőt kisebb osztályos tanulók) számára is hozzáférhetővé és érdekessé tegyük ezt a fontos matematikai módszert.

A következő feladatokban n tetszőleges természetes számot jelöl. A feladatok után útmutatásokat is találunk.

1. Folytasd a következő sorozatot:

$$1+0=1^2+0^2,\quad 2+1=2^2-1^2,\quad 3+2=3^2-2^2,\quad 4+3=4^2-3^2,\ \ldots$$

Mit tapasztalsz? Írd fel általános formában! Bizonyítsd be!

2. Folytasd a következő sorozatot:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2},\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3},\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3\cdot 4},\ \ldots$$

Mit tapasztalsz? Írd fel általános formában! Bizonyítsd be!

3. Vizsgáld meg a következő összefüggéseket:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1=5^2,\quad 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+1=11^2,\quad 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+1=19^2,\ \ldots$$

Mit tapasztalsz? Mit mondhatunk a $2005\cdot 2006\cdot 2007\cdot 2008+1$ műveletsor eredményéről? Hogyan általánosítanál? Bizonyítsd be!

4. Állapítsd meg, hogy n^2+n+11 prímszám-e bármely n esetén?
Ugyanaz a feladat n^2+n+41 és n^2+n+p esetén, ahol p egy adott prímszám.

5. Állapítsd meg, hogy $\sqrt{n+\sqrt{n}}\in\mathbb{N}^*$ és $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}\in\mathbb{N}^*$ igaz-e?

Mit mondhatsz a $\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}}\in\mathbb{N}^*$ kijelentésről, ahol a gyökjelek száma tetszőleges?

6. Vizsgáld meg a 2^n utolsó számjegyét. Milyen szabályt veszel észre? Bizonyítsd be a kapott állítást! Hasonlóan vizsgáld meg rendre a $3,4,5,6,7,8,9$ számok hatványait is.

7. Vizsgáld meg a következő összefüggéseket:

$$1+3=2^2,\ 1+3+5=3^2,\ 1+3+5+7=4^2,\ \ldots$$

Mit tapasztalsz? Írd fel általános formában! Bizonyítsd be!

8. Vizsgáld meg a következő összefüggéseket:

$$1=1^3,\quad 3+5=2^3,\quad 7+9+11=3^3,\quad 13+15+17+19=4^3,\ \ldots$$

Mit tapasztalsz? Hogyan tudnád általánosan megfogalmazni? Bizonyítsd be az általánosításodat!

9. Folytasd a következő állításokat:

a) Két egymást követő természetes szám szorzata osztható 2-vel.

b) Három egymást követő természetes szám szorzata osztható 6-tal.

c) Négy egymást követő természetes szám szorzata osztható 24-gyel.

Hogyan fogalmaznád meg általánosan? Bizonyítsd be!

10. Ellenőrizd a következő összefüggést:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3=(1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2.$$

Hogyan írnád fel általánosan? Bizonyítsd be!

11. Ellenőrizd a következő összefüggést:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2=1+2+3+4+5+6+7+8+9.$$

Általánosítsd és bizonyítsd be!

Mit mondanál a $100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2$ eredményéről? Bizonyítsd be!

12. Tudva, hogy $i^2=-1$, számítsd ki rendre a következő kifejezések értékét:

$$(1+i),(1+i)^2,(1+i)^3,(1+i)^4,(1+i)^5.$$

Milyen ötleted van az $(1+i)^n$ kiszámítására? Bizonyítsd be!

13. Vizsgáljuk meg a következő összegek értékét:

$$1+i,\quad 1+i+i^2,\quad 1+i+i^2+i^3,\quad 1+i+i^2+i^3+i^4,\quad 1+i+i^2+i^3+i^4+i^5.$$

Milyen ötleted van az $1+i+i^2+\ldots+i^n$ kiszámítására? Bizonyítsd be!

14. Ha $x^2+x+1=0$, határozd meg rendre a következő kifejezések értékét:

$$x+\frac{1}{x},\quad x^2+\frac{1}{x^2},\quad x^3+\frac{1}{x^3},\quad x^4+\frac{1}{x^4},\quad x^5+\frac{1}{x^5}.$$

Milyen sejtésed van az $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ eredményére? Bizonyítsd be!

15. Ha elfogadjuk az $x^n=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)+1$ összefüggést, igazold, hogy $x^{n+1}=(x-1)(x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1)+1$.

16. Legyen $a_n=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ és $b_n=3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}$, ahol a kettesek és a hármasok száma n. Hasonlítsd össze a_2 és b_1, a_3 és b_2, a_4 és b_3, a_5 és b_4 értékeit. Milyen sejtésed van? Bizonyítsd be!

17. Folytasd az alábbi Pascal-féle háromszöget:

$(1+1)^0=1$					1					
$(1+1)^1=1+1$				1		1				
$(1+1)^2=1+2+1$			1		2		1			
$(1+1)^3=1+3+3+1$		1		3		3		1		
$(1+1)^4=1+4+6+4+1$	1		4		6		4		1	

Milyen szabályt veszel észre? Vizsgáld meg az $(a+b)^n$ kifejtését is. Hogyan kapcsolódik az előbbiekhez? Mit tudnál bizonyítani?

18. Igazold, hogy egy háromszög belső szögeinek összege 180°. Próbálkozz hasonló állítással 4, 5, 6 oldalú konvex sokszög esetén is. Hogyan fogalmaznád meg általánosan? Bizonyítsd be!

19. Hány átlója van egy 4, 5, 6, illetve 7 oldalú sokszögnek? És egy n oldalú sokszögnek? Bizonyítsd be!

20. Egy társaságban n tanuló van és egymással mindenki kezet fogott. Hány kézfogás történt?

21. Felhasználva esetleg a $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ azonosságot, igazold, hogy

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{x}{2}}, \text{ ahol } x \neq k\pi.$$

22. Használva esetleg az $(1-a)(1+a) = 1-a^2$ azonosságot, igazold, hogy

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n}) = 1+a+a^2+a^4+\ldots+a^{2^n}.$$

23. Igazold, hogy $\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}<2$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}<2$.

Milyen elképzelésed van a $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}<2$ bizonyítására? (A gyökök száma tetszőleges.)

24. Legyen $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $a_4=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.

Mit jelölnél a_n-nel? Keress összefüggéseket a_2 és a_1, a_3 és a_2, a_4 és a_3, majd a_{n+1} és a_n között. Bizonyítsd be!

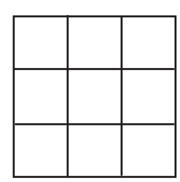
25. Igazold, hogy

$$\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20}}}+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots+\sqrt{12}}}+ +\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots+\sqrt{30}}}<15,$$

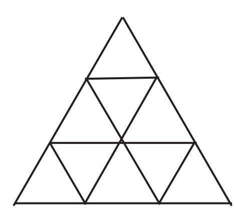
ahol a gyökök száma tetszőleges.

26. Írd növekvő sorrendbe a **24.** feladatból az $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ számokat. Hasonlítsd össze a_{n+1} és a_n értékeit. Bizonyítsd be!

27. Hány téglalapot lehet megszámlálni a mellékelt 3×3-as ábrán? És egy hasonló beosztású 1×1-es, 2×2-es, 4×4-es ábrán? És egy $n\times n$-es ábrán? Bizonyítsd az állításodat!



28. Hány háromszöget lehet megszámlálni a mellékelt 3×3-as ábrán? És egy hasonló beosztású 1×1-es, 2×2-es, 4×4-es ábrán? És egy $n\times n$-es ábrán? Bizonyítsd is állításodat!



29. Hogyan fogalmaznád meg a **27.** és **28.** feladatok térbeli megfelelőit? Próbáld megsejteni eredményeidet. Bizonyítsd be!

30. Egy négyzetet darabolj fel rendre

a) 4, 7, 10, 13; b) 6, 9, 12, 15; c) 8, 11, 14, 17 négyzetre.

Fel lehet-e darabolni egy négyzetet akárhány, $n \geq 6$ darab négyzetre? Bizonyítsd be észrevételeidet!

31. Ugyanaz a feladat, csak a négyzet helyett egy háromszöget darabolunk $n \geq 6$ darab hasonló háromszögre.

32. Igazold, hogy egy kocka feldarabolható $n \geq 58$ darab kockára!

Igazold, hogy egy tetraéder feldarabolható akárhány $n \geq 58$ darab hasonló tetraéderre!

33. Igazold, hogy $n \geq 1$ darab négyzet feldarabolható úgy, hogy az összes darabból egyetlen négyzetet lehessen kirakni.

34. Egy téglalapot darabolj fel $5, 6, 7, 8$, illetve 9 téglalapra úgy, hogy ezek közül bármely két szomszédos téglalap ne alkosson téglalapot. Hogyan igazolnád ezt minden $n \geq 5$ esetén?

35. Osszuk fel a síkot n általános helyzetű egyenessel (nincs két párhuzamos vagy három összefutó). Jelölje P_n a kapott részek számát. Bizonyítsuk be, hogy $P_{n+1} = P_n + (n+1)$, majd innen vezessük le, hogy $P_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1$.

36. Osszuk fel a teret n számú általános helyzetű síkkal. Jelölje S_n a kapott részek számát. Bizonyítsuk be, hogy $S_{n+1} = S_n + P_n$ (ahol P_n az előbbi), majd vezessük le, hogy $S_n = 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

37. Osszuk fel egy gömb felületét n számú nagykörrel (melyek közül bármely háromnak nincs közös pontja). Jelölje A_n a keletkezett tartományok számát.

Igazoljuk, hogy $A_{n+1} = A_n + 2n$, majd vezessük le az A_n értékét.

38. Bizonyítsuk be, hogy egy ponton átmenő n számú sík (ha bármely három nem megy át egy egyenesen) a teret $B_n = n(n-2) + 2$ részre osztja.

39. Igazoljuk, hogy bármely háromszög feldarabolható $n \geq 3$ egyenlő szárú háromszögre.

40. Legyen $a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a + \dfrac{1}{a}$ egész szám. Igaz-e, hogy $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$, $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$, $a^4 + \dfrac{1}{a^4}$ is egész számok? És az, hogy $a^n + \dfrac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$?

41. Milyen n természetes számok esetén létezik a $+$ és $-$ előjeleknek egy olyan megválasztása, amelyre $1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm n = 0$?

42. Igazoljuk, hogy bármely $m \in \mathbb{N}$ esetén létezik $n \in \mathbb{N}$ és a $+$ és $-$ előjeleknek egy olyan megválasztása, amelyre $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm n^2 = 0$.

43. Legyen $a_{n+1} = 5^{a_n}$ és $a_1 = 5$. Vizsgáljuk meg az $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$ különbségek utolsó 1, 2, 3 számjegyét. Igazoljuk, hogy a_{n+1} és a_n utolsó n számjegye megegyezik.

44. Igazoljuk, hogy bármely $n \geq 8$ lej értékű összeg kifizethető csak 3 és 5 lejes pénzérmék segítségével.

45. Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényeket, amelyekre $f(m+n) = f(m) + f(n)$, bármely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén.

46. Határozzuk meg azokat az $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ függvényeket, amelyekre:
a) $f(p) = p$, bármely p prímszám esetén.
b) $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$, bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

47. Határozzuk meg azokat az $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ függvényeket, amelyekre:
a) $f(2) = 2$;
b) ha $n < m$, akkor $f(n) < f(m)$, bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén;
c) $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$, bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

48. Határozzuk meg azokat az $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ függvényeket, amelyekre:
a) $f(1) = 1$;
b) $f(m) + f(n) = f(m+n) - mn$, bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

49. Tekintsük a Gauss-féle számtani és mértani sorozatok tagjait:
$a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, $a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, $a_3 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$, $\ldots$, $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$
$b_1 = \sqrt{a_0 b_0}$, $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, $b_3 = \sqrt{a_2 b_2}$, $\ldots$, $b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$, ahol $a_0 > b_0$.

Igazoljuk, hogy $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > a_n > b_n > b_{n-1} > \ldots > b_2 > b_1 > b_0$.

50. Ha az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül az $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$ összefüggés, bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, igazoljuk, hogy $f\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right) \geq \dfrac{f(a)+f(b)+f(c)+f(d)}{4}$, bármely $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esetén, majd innen vezessük le, hogy bármely x, y, z esetén $f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) \geq$ $\geq \dfrac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$.

Hasonlóan igazoljuk, hogy állításunk teljesül tetszőleges $n \geq 2$ számú tag esetén is.

Sajátos esetként vizsgáljuk az $f(x) = \ln x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^2$ függvényeket is az értelmezési tartományukon.

Útmutatások a feladatok megoldásához

A továbbiakban a teljes matematikai indukció módszerét t.m.i. jelöli.

1. $(n+1) + n = (n+1)^2 - n^2$.

2. $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3. $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

4. $n^2 + n + p \,\vdots\, p$, ha $n = p$.

5. Ha $\sqrt{n + \sqrt{n}} \in \mathbb{N}^*$, akkor $n = k^2$, így $\sqrt{k^2 + k} \notin \mathbb{N}^*$, mert $k^2 < k^2 + k < (k+1)^2$, majd lépésről lépésre, t.m.i.-vel $\sqrt{n + \sqrt{n + \ldots + \sqrt{n}}} \notin \mathbb{N}^*$.

6. Az 5, 6 utolsó számjegyei hatványozással nem változnak, a 4, 9 hatványainak utolsó számjegye kettőnként, míg a 2, 3, 7, 8 esetén négyenként változnak, t.m.i.-vel is bizonyítható.

7. T.m.i.-vel igazolható, hogy $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

8. Általában $a + (a+2) + \ldots + (a + (2n-2)) = n^3$ és $a = 2k+1$ esetén $2k = n(n-1)$ adódik, amit visszahelyettesítünk. T.m.i.-vel igazoljuk.

9. n egymást követő természetes szám szorzata osztható $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$-sal, t.m.i.-vel bizonyítjuk.

10. T.m.i.-vel, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

11. T.m.i.-vel, $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$.

12. $(1+i)^{2k} = 2^k \cdot i^k$, $(1+i)^{2k+1} = 2^k \cdot i^k \cdot (1+i)$, mindkettőnek négy alakja van.

13. A keresett általános összeg értéke 1, ha $n = 4k$; $1 + i$, ha $n = 4k + 1$; i, ha $n = 4k + 2$; 0, ha $n = 4k + 3$. T.m.i.-vel is bizonyítható.

14. $x^n + x^{-n} = 2$, ha $n = 3k$ és -1, ha $n = 3k + 1$ vagy $n = 3k + 2$, t.m.i.-vel is bizonyíthatjuk.

15. Az adott összefüggést x-szel szorozzuk, majd hozzáadunk és kivonunk 1-et, és kiemeljük az $(x - 1)$ közös tényezőt.

16. $a_2 > b_1$, $a_3 < b_2$, $a_4 < b_3 \ldots$ és általában $a_{n+1} < b_n$, amit t.m.i.-vel is bizonyíthatunk.

17. Az együtthatókból alkotott Pascal-féle háromszögnek függőleges szimmetriatengelye van és $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $3 + 3 = 6$, $\ldots$ stb.

18. Az $n = 3$ esetben Eukleidész IX. axiómája alapján, továbbá t.m.i.-vel az $(n+1)$ oldalú sokszöget egy n oldalúra és egy háromszögre bontjuk; így $S_{n+1} = (n - 1)\pi$.

19. Az előbbihez hasonlóan darabolunk, és t.m.i.-vel igazoljuk, hogy az átlók száma $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

20. Az előbbi feladat átfogalmazása.

21., 22. Alkalmazzuk a jelzett képleteket, és t.m.i.-vel bizonyítunk.

23., 24., 26. T.m.i.-vel igazoljuk, az $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $a_1 = \sqrt{2}$ alapján.

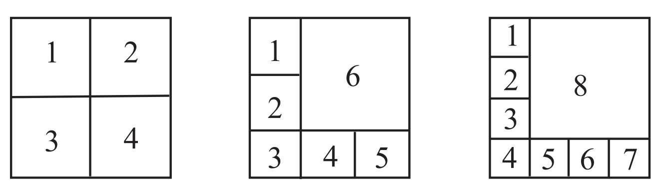
25. Hasonlóan, t.m.i.-vel igazoljuk, ha $x_1 = \sqrt{20}$, akkor $x_{n+1} = \sqrt{20 + x_n} < 5$; ha $y_1 = \sqrt{12}$, akkor $y_{n+1} = \sqrt{12 + y_n} < 4$; ha $z_1 = \sqrt{30}$, akkor $z_{n+1} = \sqrt{30 + z_n} < 6$.

27. 1-et az 1×1-esen, $9 = (1+2)^2$-t a 2×2-esen, $36 = (1+2+3)^2$-t a 3×3-ason, t.m.i.-vel $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \ldots + n)^2$-t az $n \times n$-esen.

28. Könnyebb megszámlálni az előbbi rajzokon a négyzeteket, 1^2 az 1×1-esen, $1^2 + 2^2$ a 2×2-esen, t.m.i.-vel $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ az $n \times n$-esen.

29. Az előbbiekhez hasonló, csak a hatványkitevőben 2 helyett 3 lesz.

30. Az ábrák alapján egy kisnégyzetet ismételten négy négyzetre osztunk. T.m.i.-vel $n \to (n + 3)$ bizonyítható, ha az első ábra egyik négyzetét n négyzetre osztjuk.

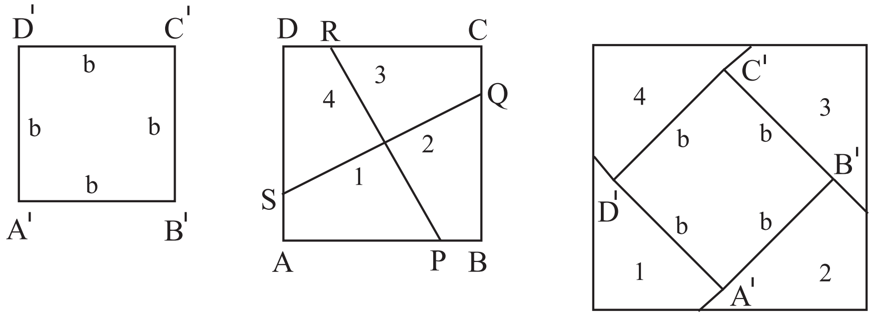


4,7,10,... 6,9,12,... 8,11,14,...

31. Ekvivalens az előbbi feladattal.

32. Hasonlóan az előbbi két feladathoz, csak itt t.m.i.-vel $n \to (n+8)$ bizonyítható (ezért $n \geq 58$).

33. T.m.i.-vel igazoljuk, $n = 1$ evidens. Elegendő az $n = 2$ bizonyítása, hiszen $n+1$ összedarabolt négyzet közül kettőből egy négyzetet rakunk ki, így a t.m.i. használható. Legyen $a \geq b$ a két szóbanforgó $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyzet oldala, P, R, Q, S pedig az $AP = BQ = = CR = DS = \dfrac{a+b}{2}$ egyenlőségeket teljesítő pontok. Az összeillesztést a következő rajzokon szemléltetjük.



34. T.m.i.-vel bizonyítunk, a mellékelt ábrák kistéglalapjait ismételten 5 darabra osztjuk, így az $n \to (n+4)$ igazolható.

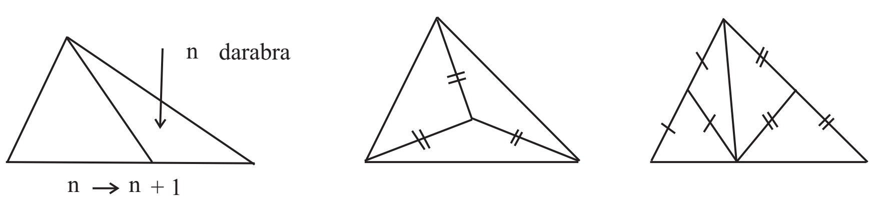
35. T.m.i.-vel, $n+1$ egyenes esetén a meglevő n-hez találomra húzzunk egy egyenest, ez az összes régit különböző pontokban metszi, így n pont az új egyenest $n+1$ részre osztja, minden ilyen rész kettévág egy síkrészt, így $2(n+1)$ új síkrész keletkezik, megszűnik $(n+1)$.

36. Hasonló az előbbihez, t.m.i.-vel, ha n sík a teret S_n részre osztja, az újabb $(n+1)$ síkon n metszésegyenes keletkezik, ami ez utóbbi síkon P_n tartományt határoz meg, minden ilyen rész a tér egy régi részét kétszerezi, stb.

37. T.m.i.-vel, ha megrajzoljuk az $(n+1)$ nagykört, ez mindegyiket két-két pontban metszi, tehát ez utóbbi $2n$ ív lesz, mindegyik egy-egy tartományt oszt ketté, innen $A_{n+1} = A_n + 2n$.

38. Ekvivalens az előbbivel.

39. T.m.i.-vel, a következő ábrák szerint:



40. $S_n = a^n + a^{-n}$ és az $S_{n+1} = S_1 S_n - S_{n-1}$ alapján t.m.i.-vel.

41. T.m.i.-vel, igaz, ha $n = 4k$ vagy $n = 4k+3$, az $n \to (n+4)$, $0 = m - (m+1) - -(m+2) + (m+3)$ alapján.

42. T.m.i.-vel az $n \to (n+4)$ bizonyítható, $n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4$ miatt.

43. T.m.i.-vel, $a_{n+1} - a_n = 5^{a_n - a_{n-1}}(5^{a_{n-1}} - 1)$ és $a_m - a_{n-1} = M10^k$ alapján.

44. T.m.i.-vel, $8 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5$, $9 = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5$, $10 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ és $n = 3a + 5b$ alapján $n \to (n+3)$ igazolható, hiszen $n + 3 = 3(a+1) + 5b$, ahol $a, b \in \mathbb{N}$.

45. Az $m = n$ esetből kiindulva, t.m.i.-vel $f(k) = k \cdot f(1)$ igazolható.

46., 47. Az $m = n$ esetből kiindulva, t.m.i.-vel $f(k) = k$ igazolható.

48. Az $m = 1$ esetből kiindulva, majd összegezve, $f(k) = \dfrac{k(k-1)}{2} + 1$ igazolható.

49. T.m.i.-vel igazolható, hogy $a_k > b_k$, majd az $a_{k-1} > a_k$ és $b_k > b_{k-1}$.

50. Az $x = \dfrac{a+b}{2}$ és $y = \dfrac{c+d}{2}$ esetén alkalmazzuk kétszer a megadott összefüggést, majd az $a = x$, $b = y$, $c = z$, $d = \dfrac{x+y+z}{2}$ helyettesítést végezzük. T.m.i.-vel az előbbiek mintájára, $n \to 2n \to (n+1)$ bizonyítható.