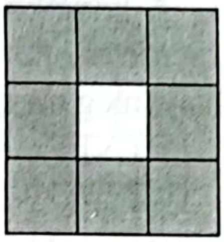
KEDVENC FELADATOM

Tuzson Zoltán (Székelyudvarhely)

Az **ML 8/2000** számában, a **Szórakoztató Matematika** rovatban a **Kincsőrzés** című feladványról olvashatunk. A szóban forgó feladványnak több más változata is van, egyik az Aranyhímző lányok néven vált ismertté. Az említett feladatoknak a lényege ugyanaz. A mellékelt ábrán látható 8 szobában, különböző számú személyeket kell elhelyezni úgy, hogy mind a négy oldal mentén, a 3-3 szobában levő személyek száma ugyanannyi, pontosan 9 legyen.



A kíváncsiskodó Olvasóban könnyen felmerülhetnek a következő kérdések:

1) *Legalább hányan kell legyenek a 8 szobában összesen, hogy a kért elhelyezés lehetséges legyen?*
2) *Legfennebb hányan lehetnek a 8 szobában összesen, hogy a kért elrendezés lehetséges legyen?*
3) *Az előbbi két feltétel teljesülése mellett, hányan lehetnek a 8 szobában összesen?*

Az említett kérdések megválaszolása nem igényel különösebb matematikai ismereteket, csupán egy kis kreativitásra van szükség. A mellékelt ábra jelöléseit használva, a 8 szobában tartózkodó személyek száma legyen a, b, c, d, e, f, g, h. A négyzet szimmetria tulajdonságai miatt, teljesen mellékes a betűk elhelyezésének a sorrendje.

g	**f**	**e**
h		**d**
a	**b**	**c**

A kért feltételek mellett, a következő egyenletek írhatók fel: **(1)** $\mathbf{a+b+c=9}$; **(2)** $\mathbf{c+d+e=9}$; (3) $\mathbf{e+f+g=9}$; (4) $\mathbf{g+h+a=9}$. Összegezve az (1)-(4) egyenletek megfelelő oldalait, a $\mathbf{2(a+c+e+g)+(b+d+f+h)=36}$ (*) adódik, ahol $\mathbf{a, b, c, d, e, f, g, h} \in \{\mathbf{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}\}$. Ilyen feltételek mellett keressük meg az $\mathbf{S=a+b+c+d+e+f+g+h}$ összeg lehető legnagyobb, illetve legkisebb értékét. Észrevehető, hogy a (*) összefüggés így is átírható:
$\mathbf{2(a+b+c+d+e+f+g+h)-(a+c+e+g)=36}$ (**) Ezért, ha feltételeznénk, hogy $\mathbf{S<18}$ **is lehetséges lenne,** akkor $\mathbf{2S<36}$ is igaz, ezért $\mathbf{2S-(a+c+e+g)<36}$ **még inkább igaz, vagyis a (**)** alapján a $\mathbf{36<36}$ *ellentmondáshoz* jutottunk. **Tehát, a nyolc szobában összesen** *legalább 18-an* kell legyenek. Ezzel az 1)-es **kérdésre választ is adtunk.** Most feltételezzük, hogy $\mathbf{S>36}$ lehetséges lenne. **Ezúttal vegyük észre, hogy a (*)** összefüggés így is átírható:
$\mathbf{(a+b+c+d+e+f+g+h)+(a+c+e+g)=36}$ (***) vagyis $\mathbf{S+(a+c+e+g)=36}$, ami az $\mathbf{S>36}$ **feltétel mellett,** az $\mathbf{a+c+e+g<0}$ egyenlőtlenséget eredményez-

ni, ez pedig lehetetlen. Tehát a 8 szobában összesen *legfennebb 36* személy tartózkodhat. Ezzel a 2)-es kérdésre is válaszoltunk.

A továbbiakban, a négyzet szimmetria tulajdonságainak a figyelembe vételével, konstruktív módszerrel, egy-egy konkrét példával igazoljuk, hogy minden, 18-tól 36 személyig terjedő személy konkrétan elhelyezhető a kért módon. Ezzel a 3)-as kérdésre adunk választ.

A következő lehetséges elrendezések, csupán 1-1 példát mutatnak mind a 19 esetre. Az érdeklődő Olvasónak javasoljuk, hogy mindegyik esetben próbálja meg megkeresni az összes (nem egyenértékű) szóban forgó elhelyezéseket.

2		7
7		2

18

1		8
		1
8	1	

19

2	1	6
1		1
6	1	2

20

1	2	6
2		1
6	1	2

21

3	2	4
2		2
4	2	3

22

2	3	4
3		2
4	2	3

23

4	3	2
3		3
2	3	4

24

2	7	
		7
7		2

25

1	4	4
4		4
4	4	1

26

	9	
1		8
8		1

27

2	5	2
5		5
2	5	2

28

4	4	1
4		7
1	7	1

29

3	6	
6		6
	6	3

30

	7	2
7		6
2	6	1

31

2	7	
7		7
	7	2

32

	8	1
8		7
1	7	1

33

1	8	
8		8
	8	1

34

1	8	
8		9
	9	

35

	9	
9		9
	9	

36

A (**) összefüggés alapján könnyen belátható, hogy 36 személy esetén csak az ábrán látható egyetlen megoldás lehetséges.

* * * * *

Ramanujant meglátogatta egyszer egy barátja. „Az *A 1729* rendszámú taxin érkeztem ide. Úgy gondolom, hogy ennek a számnak nincs semmi különös érdekessége." – mondta. „Tévedsz, ez a legkisebb olyan szám, amelyik két különböző módon írható fel két harmadik hatvány összegeként." – válaszolta Ramanujan. Valóban: $1729 = 12^3+1^3 = 10^3+9^3$.

Srinivasa Ramanujan (1887–1920) világhírű indiai matematikus volt.