POLYGON
XXIV/1. szám, 2016. nov.

A középarányos egyenlőtlenségek általánosítása folytonos és monoton függvény által

Tuzson Zoltán

A középarányosokkal már a gimnáziumban levő tanulók is találkoznak, és bizonyítják is a következő egyenlőtlenségláncot:

Ha $0 < a \le b$, akkor fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$a \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{a\cdot b} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b, \tag{1}$$

ahol balról jobbra a kifejezések a harmonikus-, mértani-, számtani- és négyzetes közepek. Egyenlőtlenség mindenhol csak az $a = b$ esetben áll fenn. Az egyenlőtlenségek bizonyítása teljes négyzetek kialakításával könnyűszerrel elvégezhető, ezen kívül még létezik geometriai bizonyítás is a körön, lásd például az [1]-et.

Nagyobb osztályokban az előbbi középarányos egyenlőtlenségeket általánosítják is két tag helyett n tagra. Azok bizonyítása több módon történhet, például matematikai indukcióval, vagy éppen a konvex függvényekkel. Mint látni fogjuk ez utóbbi egészen természetes környezete a középarányosoknak és a köztük levő egyenlőtlenségeknek.

Tétel. *Legyen a_i, p_i pozitív valós szám minden $i = \overline{1,n}$ esetén. Ekkor fennállnak a következő úgynevezett súlyozott közepek közötti egyenlőtlenségek:*

(2)

$$\min_{i=\overline{1,n}} a_i \le \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{a_i}} \le \left(\prod_{i=1}^n a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}} \le \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i^2}{\sum_{i=1}^n p_i}} \le \max_{i=\overline{1,n}} a_i.$$

Bizonyítás. Ismert, hogy egy konkáv függvény teljesíti az úgynevezett Jensen-féle egyenlőtlenséget, miszerint ha x_i, p_i pozitív valós szám minden $i = \overline{1,n}$ esetén, akkor

$$\frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \cdots + p_n f(x_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \le f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right). \tag{3}$$

De az $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ függvény éppen konkáv az $\mathbb{R}_+^*$ intervallumon, mivel $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ha $x \in \mathbb{R}_+^*$, ezért teljesíti az előbbi egyenlőtlenséget, ami alapján

$$\frac{p_1 \ln a_1 + p_2 \ln a_2 + \cdots + p_n \ln a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \leq \ln\left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)$$

és innen éppen a (2) egyenlőtlenséglánc középső egyenlőtlenségét kapjuk. Ellenben ha ebben az egyenlőtlenségben az $a_i$értékeket $\frac{1}{a_i}$-re cseréljük, akkor

$$-\frac{p_1 \ln a_1 + p_2 \ln a_2 + \cdots + p_n \ln a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \leq \ln\left(\frac{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \cdots + \frac{p_n}{a_n}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)$$

ahonnan megkapjuk a (2) egyenlőtlenséglánc baloldali egyenlőtlenségét. A (2) jobboldali egyenlőtlenségének a bizonyítása végett az $f(x) = x^2$ segédfüggvényt vesszük, ez ellenben konvex, így a (3)-as Jensen egyenlőtlenség éppen a fordított irányú. Ezzel a választással a következő egyenlőtlenség adódik:

$$\frac{p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + \cdots + p_n a_n^2}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \geq \left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^2,$$

ami éppen a (3) egyenlőtlenséglánc jobboldali egyenlőtlensége.

Mint az (1) mint a (2) egyenlőtlenségláncok láttán természetesen merül fel az a kérdés, hogy léteznek-e még olyan középarányosok, amelyek beleillenek az (1) illetve (2) középarányos egyenlőtlenség láncba. Erre a kérdésre a továbbiakban válaszolunk, amikor folytonos és monoton függvény segítségével általánosítjuk a középarányos egyenlőtlenségeket.

Mindezek előtt ellenben bizonyítunk néhány állítást, amelyekre szükségünk lesz a végső eredményeink bizonyításánál.

2. Állítás. *Legyen A_i pozitív valós szám minden $i = \overline{1,n}$ esetén, ekkor:*

$$\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n} \leq \left(A_1^{A_1} \cdot A_2^{A_2} \cdots A_n^{A_n}\right)^{\frac{1}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}} \tag{4}$$

Bizonyítás. Ha a (2) egyenlőtlenség baloldali egyenlőtlenségében az $a_i = p_i = A_i$ választást tesszük minden $i = \overline{1,n}$ esetén, éppen a bizonyítandó (4)-as egyenlőtlenséget kapjuk.

3. Állítás *Legyen a_i pozitív valós szám minden $i = \overline{1,n}$ esetén, akkor*

$$\lim_{t \to 0}\left(\frac{a_1^t + a_2^t + \cdots + a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

Bizonyítás. Mivel 1^∞ határozatlan esetről van szó, ezért az e szám segítségével bizonyítunk, miszerint

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i^t-1)}{n}\right)^{\frac{1}{t}} &= e^{\lim_{t\to 0}\frac{1}{n}\left(\frac{a_1^t-1}{t}+\frac{a_2^t-1}{t}+\cdots+\frac{a_n^t-1}{t}\right)}\\ &= e^{\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)} = e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\\ &= \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\end{aligned}$$

4. Állítás. *Legyen a_i pozitív valós szám minden $i=\overline{1,n}$ esetén, akkor*

(a)
$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} = \max_{i=\overline{1,n}} a_i,$$

(b)
$$\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} = \min_{i=\overline{1,n}} a_i.$$

Bizonyítás. Az (a) bizonyítása végett a rendőr-elvet alkalmazzuk, miszerint ha $\max_{i=\overline{1,n}} a_i = M$, akkor

$$\frac{M}{n^{\frac{1}{t}}} = \left(\frac{M^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} \le \left(\frac{a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} \le \left(\frac{M^t+M^t+\cdots+M^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} = M$$

és mindkét oldalon $t\to+\infty$ határértéket véve, a középső kifejezés határértéke is M kell legyen. A (b) pont bizonyítása is az előzőek mintájára történik.

A jelen dolgozatunk központi eredményeit a következő tételekben fogalmazzuk meg:

1. Tétel *Legyen a_i pozitív valós szám minden $i=\overline{1,n}$ esetén, akkor értelmezzük az $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:*

$$F(t) = \left(\frac{a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} \ \textit{ha } t\neq 0 \textit{ és } F(0) = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Ekkor az F függvény folytonos és monoton növekvő az $\mathbb{R}$-en.

Bizonyítás. A függvény folytonosságának a vizsgálata csak a $t=0$ pontban merül fel, ellenben a 3. Állítás értelmében az F függvény az értelmezéséből adódóan itt is folytonos. A monotonitás vizsgálata céljából vezessük be az $a_i^t = A_i$ jelöléseket minden $i=\overline{1,n}$ esetén. Ekkor felírható, hogy:

$$t^2\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{A_1\ln A_1+A_2\ln A_2+\cdots+A_n\ln A_n}{A_1+A_2+\cdots+A_n} - \ln\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{\frac{A_1}{A_1}+\frac{A_2}{A_2}+\cdots+\frac{A_n}{A_n}}.$$

Ez a tört a 2. állítás alapján nem negatív, így hát $t^2\frac{F'(t)}{F(t)}\ge 0$, ahonnan $F'(t)\ge 0$, ami azt jelenti, hogy az F függvény monoton növekvő az R-en.

2. Tétel. *Legyen a_i pozitív valós szám minden $i = \overline{1,n}$ esetén, továbbá $\alpha \in (-\infty,-1)$, $\beta \in (-1,0)$, $\delta \in (0,1)$ és $k \in (1,+\infty)$ akkor fennállnak a következő egyenlőtlenségek:*

$$\min_{i=\overline{1,n}} a_i \le \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \le \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$
$$\le \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^\delta}{n}\right)^{\frac{1}{\delta}} \le \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \le \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \le \max_{i=\overline{1,n}} a_i$$

Bizonyítás. Az egyenlőtlenséglánc tulajdonképpen a következő egyenlőtlenséglánc:

$$F(-\infty) \le F(\alpha) \le F(-1) \le F(\beta) \le F(0) \le F(\delta) \le F(k) \le F(+\infty),$$

ami az F monoton növekvő volta miatt, a 3. és 4. Állítások alapján igaz.

Ez tehát az az egyenlőtlenséglánc amelyik az összes fontosabb középarányos egyenlőtlenséget tartalmazza. Sajátos módon, $n = 2$, $0 < a \le b$, $\alpha \in (-\infty,-1)$, $\beta \in (-1,0)$, $\delta \in (0,1)$ és $k \in (1,+\infty)$ esetben a következő egyenlőtlenségláncot kapjuk:

$$a \le \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \left(\frac{a^\beta + b^\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}} \le \sqrt{a\cdot b}$$
$$\le \left(\frac{a^\delta + b^\delta}{2}\right)^{\frac{1}{\delta}} \le \frac{a+b}{2} \le \left(\frac{a^k + b^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}} \le b.$$

A 2. Tétel egyenlőtlenséglánca is tovább általánosítható súlyozott középarányosok esetére.

3. Tétel. *Legyen a_i, p_i pozitív valós szám minden $i = \overline{1,n}$, akkor értelmezzük az $G_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:*

$$G_p(t) = \left(\frac{p_1 a_1^t + p_2 a_2^t + \cdots + p_n a_n^t}{p_1 + p_2 + \cdots p_n}\right)^{\frac{1}{t}} \quad \text{ha } t \ne 0 \text{ és } G_p(0) = \left(\prod_{i=1}^n a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}.$$

Ekkor az G_p függvény folytonos, és monoton növekvő az $\mathbb{R}$-en.

A tétel bizonyítása teljesen hasonló az 1. Tétel bizonyításával, ezért az elvégzését az érdeklődő Olvasóra bízzuk.

4. Tétel. *Legyen $a_i, p_i > 0$ és*

$$H(a,p) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{a_i}}, \qquad G(a,p) = \left(\prod_{i=1}^n a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}},$$

$$A(a,p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \qquad M_t(a,p) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{t}},$$
$$m = \min_{i=\overline{1,n}} a_i, \qquad M = \max_{i=\overline{1,n}} a_i,$$

$\alpha \in (-\infty,-1)$, $\beta \in (-1,0)$, $\delta \in (0,1)$ és $k \in (1,+\infty)$ akkor fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} m &\le M_\alpha(a,p) \le H(a,p) \le M_\beta(a,p) \le G(a,p) \\ &\le M_\delta(a,p) \le A(a,p) \le M_k(a,p) \le M \end{aligned}$$

A tétel bizonyítása a G_p monoton növekvősége alapján azonnal adódik.

Megjegyzés. Az előbbiekből azonnal következik, hogy ha $2 \le k \le m$, $k,m \in \mathbb{N}^*$, a_i, p_i pozitív, valós szám minden $i = \overline{1,n}$ esetén, akkor

$$\sqrt[k]{\frac{p_1 a_1^k + p_2 a_2^k + \cdots + p_n a_n^k}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}} \le \sqrt[m]{\frac{p_1 a_1^m + p_2 a_2^m + \cdots + p_n a_n^m}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}}$$

Szakirodalom

[1] `http://hu.wikipedia.org/wiki/Matematikai_k%C3%B6zepek`

[2] Pólya György, Szegő Gábor, Feladatok és tételek az analízis köréből, I. kötet 5. fejezet.

[3] M. Gheorghe, R. Niculescu, P. Radovici Marculescu, O ierarhie continua si monotona pentru valorile medii uzuale, GMA 3-4/1985, 391. oldal.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely,
tuzo60@gmail.com