MAGASABBFOKÚ MÁTRIXEGYENLETEK MEGOLDÁSA

Tuzson Zoltán

Bizonyára már „örökzöld feladat”-nak minősíthető a következős feladat, ami például az [1]-ben is és a [2]-ben is megtalálható : „Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(Z)$ mátrix létezik, amelyekre $A^2 = I_2$”

Az [1]-ben a megoldás ennyit közöl: *x= a, y= 1, z= 1- a^2 , t= - a* és *a*∈ Z, a [2]-ben pedig ezt találjuk: *x= a, y= 1+a, z= 1- a , t= - a* és *a*∈ Z. Természetesen kérdezhetünk rá, hogy honnan kapjuk a jelzett megoldásokat, illetve a feladat miért is nem azt kéri, hogy „Határozzuk meg azok az $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(Z)$ mátrixokat, amelyek teljesítik az $A^2 = I_2$ mátrixegyenletet”. A továbbiakban választ adunk a feltett kérdésekre, és látni fogjuk, hogy ez, a megfogalmazásában rövid kis feladat megoldása mennyi érdekességet rejteget.

Könnyen kiszámítható, hogy $A^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x+t) \\ z(x+t) & yz + t^2 \end{pmatrix}$ ahol *x, y, z, t* ∈Z. Az $A^2 = I_2$ mátrixegyenlőség alapján a következő egyenletrendszer adódik:

$x^2 + yz = 1$ (1) ; $y(x+t) = 0$ (2) ; $z(x+t) = 0$ (3) ; $yz + t^2 = 1$ (4).

I.) Amennyiben $x + t \neq 0$, úgy a (2) és (3) alapján *y=z=0* szükséges, így az (1) és (4) alapján $x^2 = t^2 = 1$ adódik, ezért az $x + t \neq 0$ feltételt is kielégítő számnégyesek: (1, 0, 0, 1); (- 1, 0, 0, - 1), így az $A = I_2$ és $A = -I_2$ megoldások adódnak.

II.) Amennyiben $x + t = 0$, úgy a (2) és (3) egyenlőségek minden *y* illetve *z* esetén teljesülnek, és az *x= - t* alapján pedig az (1) és (4) egyenlet egybeesik és ez a következő: $x^2 + yz = 1$, ahol *x, y, z* ∈Z (*) ami egy háromismeretlenes másodfokú diofantikus egyenlet. Könnyen ellenőrizhető, hogy az (*a*, *1*, *1*- a^2) illetve az (*a*, *1*+ *a*, *1*- *a*) számhármasok a (*) egyenletnek valóban megoldásai, de azonnal rákérdezhetnénk, honnan is kapjuk ezeket, illetve meghatározható-e az egyenlet összes (*x, y, z*) ∈Z^3 megoldása?

Mielőtt a feladat részletes megoldásába bocsátkoznánk, vegyük észre, hogy ha *y* vagy *z* értéke *+1* vagy *-1* (de $|y| = 1$ és $|z| = 1$ egyidőben nem igaz), akkor a (*) egyenletből az *x=a* tetszőleges egész szám választással a harmadik ismeretlen értéke $1 \pm a^2$ lesz, és így már nyilvánvaló, hogy az [1]-ben miért az ott található választ adták. Ezt és a (*) egyenlet alakját tekintve, a [2]-ben közölt megoldás is most már nyilvánvalóbbnak tűnhet, de mindkét megoldáscsaládra visszatérünk. Továbbra is marad a kérdés: meghatározható-e a (*) egyenlet ***összes*** (*x, y, z*) ∈Z^3 megoldása? A továbbiakban megmutatjuk, hogy igen, és méghozzá egészen elemi eszközökkel. Természetesen a kapott általános megoldásokból, visszakaphatók az [1]-ben és a [2]-ben jelzett megoldások is.

A (*) egyenlet megoldása céljából, mivel olyan átalakításokat végzünk, ahol *x=1* , *x= -1*, *y=0*, *z=0*, esetek egyike sem lehetséges, ezért ezeket az eseteket külön tárgyaljuk le:

1) Ha $x=1$ akkor a (*) alapján $y\cdot z=0$, tehát $y=0$ vagy $z=0$ és $t=-x$ alapján az (x, y, z, t) megoldásnégyesek a következők: $(1, 0, z, -1)$; $(1, y, 0, -1)$ ahol $y, z \in \mathrm{Z}$ tetszőleges.
2) Ha $x=-1$, akkor teljesen hasonló módon kapjuk a $(-1, 0, z, 1)$; $(-1, y, 0, 1)$ megoldásnégyseket is.
3) Az $y\cdot z=0$ a (*) egyenlet alapján az $x^2=1$ egyenlethez vezet, de ezt már letárgyaltuk az 1) és 2) esetekben.

A továbbiakban tehát feltételezhetjük, hogy $y\cdot z\neq 0$ és $x^2\neq 1$, ahol $x, y, z \in \mathrm{Z}$. Ekkor a (*) egyenlet ekvivalens módon így írható fel: $\frac{x-1}{y}=-\frac{z}{x+1}=\frac{\alpha}{\beta}$, ahol $\frac{\alpha}{\beta}$ a két egyenlő tört értékét jelenti, és $\alpha, \beta \in \mathrm{Z}^*$ úgy, hogy $(\alpha, \beta)=1$. (**)

Így tehát $x-1=\frac{\alpha\cdot y}{\beta}$ és $x+1=-\frac{\beta\cdot z}{\alpha}$, és mivel a baloldalakon egész számok vannak, továbbá $(\alpha,\beta)=1$, ezért $y=\beta\cdot u$ és $z=\alpha\cdot v$ szüksége, ahol $u, v \in \mathrm{Z}^*$. Ebből kifolyólag $x-1=\alpha\cdot u$ és $x+1=\beta\cdot v$ ahonnan $x=\frac{\alpha\cdot u-\beta\cdot v}{2}$ és $\alpha\cdot u+\beta\cdot v=-2$.

Tehát fennállnak a következő összefüggések és feltételek:

$$x=\frac{\alpha\cdot u-\beta\cdot v}{2}\ (5),\quad \alpha\cdot u+\beta\cdot v=-2\ (6),\quad y=\beta\cdot u\ (7),\quad z=\alpha\cdot v\ (8)$$

$$\text{ahol } \alpha, \beta, u, v \in \mathrm{Z}^* \text{ és } (\alpha,\beta)=1\ (9)$$

A továbbiakban bizonyítani fogjuk, hogy előre megválasztott $\alpha, \beta \in \mathrm{Z}^*$ és $(\alpha,\beta)=1$ számokra meghatározhatók az $u, v \in \mathrm{Z}^*$, amelyek eleget tesznek az (5)-(9) feltételeknek, és ezáltal az összes $(x, y, z) \in \mathrm{Z}^3$ számhármast is meghatározzuk. Ennek a kivitelezési céljából szükségünk lesz az $\boldsymbol{\alpha\cdot u+\beta\cdot v=-2}$ diofantikus egyenlet $\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}$ halmazon történő megoldására. A [3]-ban található bizonyítási módszert követve , az egyenletnek van megoldása a $\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}$ halmazon, ugyanis az $(\alpha,\beta)=1$ feltétel alapján éteznek olyan p, q egész számok, amelyekre $\alpha\cdot p+\beta\cdot q=1$ ezért $\alpha\cdot(-2p)+\beta\cdot(-2q)=-2$ ami azt jelenti, hogy $u=-2p$ és $v=-2q$ az $\boldsymbol{\alpha\cdot u+\beta\cdot v=-2}$ (6) egyenletnek egy megoldása. Legyen u_0 és v_0 a (6) egyenlet egy tetszőleges sajátos megoldása a $\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}$-n. Tehát $\alpha\cdot u_0+\beta\cdot v_0=-2$ (10) és így, ha $u, v\in \mathrm{Z}$ is megoldások, akkor $\alpha\cdot u+\beta\cdot v=-2$ (11) és a (10),(11) alapján $\alpha\cdot u+\beta\cdot v=\alpha\cdot u_0+\beta\cdot v_0$ ahonnan $\alpha\cdot(u-u_0)=-\beta\cdot(v-v_0)$ (12) adódik, és mivel $(\alpha, \beta)=1$ ezért $\alpha \mid (v-v_0)$ és $\beta \mid (u-u_0)$ ezért létezik olyan $n\in \mathrm{Z}$ amelyre $v-v_0=\alpha\cdot n$ vagyis $v=\alpha\cdot n+v_0$ és a (12) alapján $v=\alpha\cdot n+v_0$. Ezeket visszaírva az (5)-(9) összefüggésekbe az ottani feltételekkel kapjuk, hogy a (*) egyenlet összes egész megoldása:

$$x=\alpha\cdot\beta\cdot n+\frac{\alpha\cdot u_0-\beta\cdot v_0}{2},\quad y=\beta\cdot(u_0+\beta\cdot n),\quad z=\alpha\cdot(v_0+\alpha\cdot n) \qquad (***)$$

ahol $(\alpha, \beta)=1$, $\alpha, \beta, n\in \mathrm{Z}$, továbbá u_0 és v_0 az $\alpha\cdot u+\beta\cdot v=-2$ diofantikus egyenlet egy sajátos megoldása. Számolásokkal könnyűszerrel ellenőrizhető, hogy ezekre az értékekre valóban igaz, hogy $x^2+yz=1$, vagyis x, y, z tényleg megoldások is. Továbbá az $\alpha\cdot u_0+\beta\cdot v_0=-2$ összefüggés alapján könnyen belátható, hogy $x\in \mathrm{Z}$ valóban igaz.

A [3]-ban bebizonyítják, hogy az Euklidesz algoritmussal meghatározható az ilyen lineáris diofantikus egyenletnek egy sajátos megoldása, ellenben nem túl nagy α és β esetén sajátos megoldásokat könnyűszerrel észrevehetünk.

Megjegyzések:

1) A feladat megoldását a másképpen is elkezdhettük volna. A [4]-ben bemutatott tulajdonságok alapján a d_A*=det(A)* és t_A*=Tr(A)* jelölésekkel, ha az $A^2 = I_2$ egyenlet mindkét oldalának a determinánsát vesszük, akkor $d_A^2 = 1$ adódik (i). Ugyanakkor az *A* mátrix teljesíti az $A^2 - Tr(A)\cdot A + \det(A)\cdot I_2 = O_2$ Cayley-Hamilton összefüggést (v.ö.[4]), másfelől $A^2 = I_2$, így ezek alapján $t_A \cdot A = (d_A + 1)\cdot I_2$ adódik (ii), és ha ebben az egyenletben mindkét oldalnak a nyomát vesszük, akkor $t_A^2 = 2\cdot(d_A+1)$ adódik (iii). A három összefüggés alapján ha t_A=0 akkor d_A= *-1* és az $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ betűzéssel az *x+t= 0* és $x\cdot t - y\cdot z = -1$, így ezek alapján ugyancsak az $x^2 + yz = 1$ diofantikus egyenlet megoldásához jutunk. Amennyiben pedig $t_A \neq 0$, úgy $d_A \neq$ *-1*, és az (i), (iii) alapján d_A= *1* és $t_A^2 = 4$, ezért az (ii) összefüggésből $A = \pm I_2$ adódik.

2) Az $A^2 = I_2$ mátrixegyenletnek az $M_2(C)$ halmazon való megoldása sokkal egyszerűbb mint az $M_2(Z)$ halmazon való megoldása. A cikk elején alkalmazott számolásokat használva, ha $x+t\neq 0$ úgy a (2)-(3) egyenletekből *y*= *z*= *0* és $x^2 = t^2 = 1$ adódik, amiből az $x + t \neq 0$ feltétel mellett ezúttal is az $A = \pm I_2$ megoldások adódnak. Ha *x+t=0*, akkor az $x^2 + yz = 1$ egyenlethez jutunk, ahol ha *z*= 0 akkor *x*= *t*= $\pm$ *1*és A= $\begin{pmatrix} \pm 1 & y \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$, ha pedig *y*= 0 akkor is *x*= *t*= $\pm$ *1*és A= $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ z & \mp 1 \end{pmatrix}$, ha pedig $y\cdot z\neq 0$ az *y* és *z* közül bármelyik kifejezhető, például $z = \frac{1-x^2}{y}$ és így $A = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{1-x^2}{y} & -x \end{pmatrix}$, minden *x, y*∈ C esetén és persze $y\cdot z\neq 0$.

Az előbbiekben leírtak jobb megértése és elmélyítése végett nézzünk néhány sajátos esetet:

1) Ha például $\alpha=2$ és $\beta=3$, akkor az előbb leírtak alapján $\alpha\cdot u + \beta\cdot v = -2 \Leftrightarrow 2\cdot u + 3\cdot v = -2$ és könnyűszerrel láthatjuk, hogy $u_0 = -1$ és $v_0 = 0$ az egyenletnek valóban sajátos megoldásai, és a (***) képletek alapján ebben az esetben a következő megoldáscsaládot kapjuk: *x= 6·n-1, y= 9·n-3 , z= - 4·n* ahol *n*∈ Z .

2) A (*) egyenletnek az $\frac{x-1}{y} = -\frac{z}{x+1} = \frac{\alpha}{\beta}$ átalakított formáját figyelve, megkeressük, hogy az α és β mely értékeire kapjuk meg az [1]-ben is megadott *x= a, y= 1, z= 1-* a^2 , *t= - a* és *a*∈ Z megoldásokat. Ha ezeket az értékeket behelyettesítjük az előbbi aránysora, akkor azonnal látszik, hogy az α*=a-1* és β*=1*

választás célravezető, és $(\alpha, \beta)=1$ is teljesül, hiszen az aránysorban az $y \cdot z= 0$ és $x^2 =1$ eseteket külön letárgyaltuk. Ezen α és β értékekre a (***) összefüggésekből $x= (a-1)\cdot n+1,\ y= n,\ z= -(a-1)^2\cdot n -2\cdot(a-1)$ ahol $n\in \mathrm{Z}$ adódik, és azonnal látható, hogy ha $n=1$ akkor máris visszakapjuk az [1]-ben megadott megoldáscsaládot.

3) Ugyancsak a (*) egyenletnek az $\frac{x-1}{y}=-\frac{z}{x+1}=\frac{\alpha}{\beta}$ átalakított formáját figyelve megkeressük, hogy az α és β mely értékeire kapjuk meg a [2]-ben megadott $x= a,\ y= 1+a,\ z= 1-a$, $t= - a$ és $a\in$ Z megoldásokat. Ha ezeket az értékeket behelyettesítjük az előbbi aránysorba kapjuk, hogy $\frac{a-1}{a+1}=\frac{\alpha}{\beta}$. Továbbá vegyük észre, hogy ha $d=(a-1,\ a+1)$ akkor $d \mid (a-1)$ és $d \mid (a+1)$ ahonnan $d \mid 2$ vagyis $(a-1,\ a+1) =\pm 1$ vagy $(a-1,\ a+1) =\pm 2$. Amennyiben $(a-1,\ a+1) =1$ megválasztható $\alpha= a-1$ és $\beta= a+1$, és mivel az $(a-1)\cdot u+(a+1)\cdot v=-2$ egyenletnek $u_0 =1$ és $v_0 =-1$ sajátos megoldása, a (***) összefüggések alapján kapjuk, hogy $x=(a+1)^2\cdot n+a-1$, $y= -(a-1)^2\cdot n-a+1,\ z=1-a$ ahol $n\in \mathrm{Z}$. Amennyiben az $n=0$ értékek választjuk, visszakapjuk a [1]-ben megadott megoldáscsaládot. Hasonlóan, ha $(a-1,\ a+1) =2$ akkor az $\alpha=\frac{a-1}{2}$ és $\beta=\frac{a+1}{2}$ választással már teljesül az $(\alpha, \beta)=1$ feltétel, és az $\frac{(a-1)}{2}u+\frac{(a+1)}{2}v=-2$ egyenletnek $u_0 = 2$ és $v_0 =-2$ sajátos megoldása, ezért a (*) alapján $x=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2\cdot n+a+1$, $y=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2\cdot n+a+1$ és $z=-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2\cdot n-a+1$ a megoldáshármas, és $n=0$ értékre ezúttal visszakapjuk a [2]-ben jelzett megoldáscsaládot. Az $(a-1,\ a+1) = -1$ és $(a-1,\ a+1) = -2$ esetekben a $(- a+1,\ - a-1) =1$ és $(- a+1,\ - a-1) =2$ változtatással, ugyancsak az előbbiek szerint járunk el.

Szakirodalom:

[1] C. Nastasescu, C. Nita, I. Stanescu: matematika, A felsőbb algebra elemei, Tankönyv a XI. osztály számára, EDP Bucuresti 1990, 22. oldal, 20. feladat.

[2] Csapó Hajnalka, András Szilárd: Matematika M1, Tankönyv a XI. osztály számára, Corvin Kiadó 2006, 267. oldal, 9. feladat

[3] Ion D. Ion, C. Nita, C. Nastasescu: Complemente de algebra, Ed. Stiintifica si Enciclopedica , Bucuresti-1984, 73.-74. oldalak.

[4] Tuzson Zoltán: Magasabbfokú mátrixegyenletek megoldása, MatLap 5/2007, 191-167. oldalak.